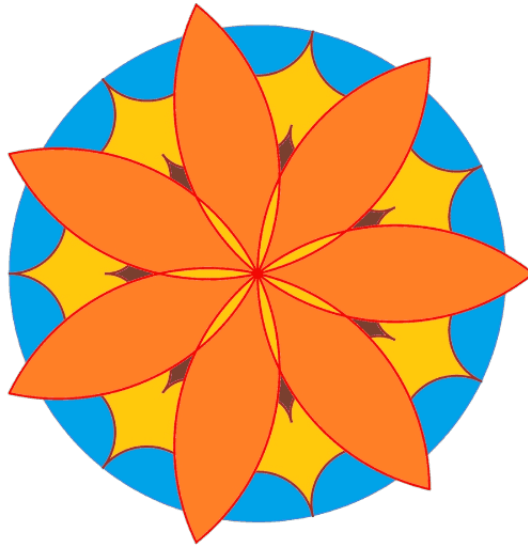


II Concurso de Matemática Universitaria

Miércoles 23 de abril del 2025



Tipo de Examen: Virtual

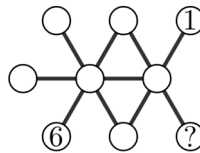
Instrucciones:

- La participación en el CoMUn es individual.
- Esta es una prueba con 20 preguntas de selección única, todas con el mismo valor.
- En la hoja de respuestas debe marcar exactamente una opción por cada pregunta.
- Dispone de 3 horas para completar el examen. Al acabar este tiempo, tendrán 5 minutos para completar y revisar la hoja de respuestas.
- Se permite el uso de artículos generales para escribir, por ejemplo lápices, lapiceros y marcadores.
- No se permite el uso de material adicional (apuntes, libros, etc), calculadoras, ni dispositivos electrónicos.

1. Santiago intenta abrir una caja que necesita un código, el cual es un entero $1 \leq N \leq 100$. Si ingresa el número correcto, entonces la caja se abre; si el número ingresado es incorrecto, entonces la caja le indica si este es mayor o menor al código. La menor cantidad de intentos con que Santiago puede garantizar abrir la caja es

- (a) 5.
- (b) 6.
- (c) 7.
- (d) 8.

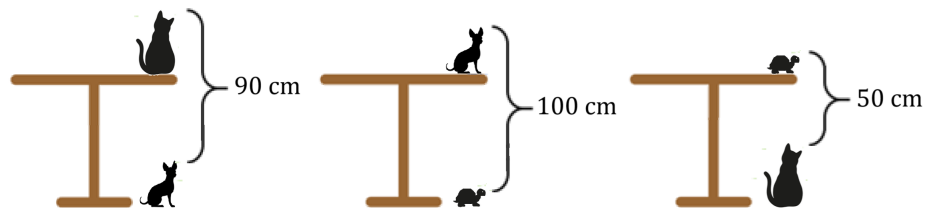
2. A cada uno de los nueve círculos de la figura le corresponde un entero distinto del 1 al 9. Si tres círculos están unidos por una línea recta (de las de la figura), entonces la suma de sus números es igual a 18.



El entero correspondiente al símbolo ? es igual a

- (a) 2.
- (b) 3.
- (c) 4.
- (d) 5.

3. En la figura se muestran las diferencias de altura entre las mascotas (gato, perro y tortuga) ubicadas sobre la mesa y al nivel del piso:



Considere las siguientes afirmaciones:

- (I) La mesa mide 80 cm.
- (II) El gato mide 45 cm.

De las afirmaciones anteriores, ¿cuáles son verdaderas?

- (a) Ninguna
- (b) Solo la I
- (c) Solo la II
- (d) Ambas

4. Helen y Jennifer pintan las caras de dos dados de rojo y azul. Helen pinta el primer dado con cinco caras rojas y una cara azul. ¿Cuántas caras rojas debe pintar Jennifer en el segundo dado para que la probabilidad de obtener dos caras del mismo color al lanzarlos sea igual a $\frac{1}{2}$?
- (a) 1
 - (b) 2
 - (c) 3
 - (d) 4
5. Considere una sucesión que satisface la relación de recurrencia $a_{n+1} = a_n + \frac{24}{a_n}$. ¿Cuál es la mayor cantidad de términos consecutivos de la sucesión que pueden ser enteros?
- (a) 1
 - (b) 2
 - (c) 3
 - (d) 4
6. Sea x un número irracional. Considere las siguientes afirmaciones:
- (I) Si $x^2 + x^{-2}$ es irracional, entonces $x + x^{-1}$ es irracional.
 - (II) Si $x^3 + x^{-3}$ es irracional, entonces $x + x^{-1}$ es irracional.
- De las afirmaciones anteriores, ¿cuáles son verdaderas?
- (a) Ninguna
 - (b) Solo la I
 - (c) Solo la II
 - (d) Ambas
7. Óscar escribe un conjunto $\mathcal{S} = \{p, q, r, s, t\}$ de cinco números reales distintos. Empieza calculando la suma de todos los elementos de todos los subconjuntos de $\mathcal{S}$ (inclusive $\mathcal{S}$) que contienen a p y obtiene 25. Luego calcula la suma de todos los elementos de todos los subconjuntos de $\mathcal{S}$ (inclusive $\mathcal{S}$) que contienen a q y obtiene 2025. Si $D = q - p$, entonces se puede afirmar que Óscar:
- (a) no puede determinar el valor exacto de D .
 - (b) puede determinar que $D = 125$.
 - (c) puede determinar que $D = 250$.
 - (d) puede determinar que $D = 500$.
8. El mínimo de la función $f(x) = |x - 1| + |2x + 4| + \left|\frac{x}{2} - 1\right|$ definida en el dominio $[-3, 3]$ se alcanza en un valor de x que pertenece al intervalo
- (a) $[-3, -1)$.
 - (b) $[-1, 0)$.
 - (c) $[0, 1)$.
 - (d) $[1, 3]$.

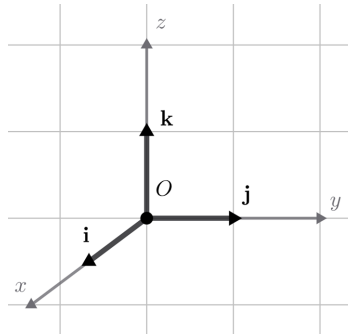
9. Sean a, b, c reales tales que $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} = 1$. Entonces el valor de $\frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{a^2}{c+a}$ es igual a

- (a) 1.
- (b) 2.
- (c) 3.
- (d) 4.

10. El valor de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \dots$ es igual a

- (a) $\frac{\pi^2+1}{24}$.
- (b) $\frac{\pi^2-1}{18}$.
- (c) $\frac{1}{2}$.
- (d) $\frac{2}{3}$.

11. Daniel está diseñando unos maceteros y representa los vectores $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ (de un sistema tridimensional) en un plano con origen $O = (0, 0)$. Las proyecciones de $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ corresponden a los vectores $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2})$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$, respectivamente, como se muestra en la figura.



Él se da cuenta que existen enteros a, b, c tales que el vector $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ se proyecta en O . Entonces Daniel sabe con certeza que $a + b + c$ es divisible entre

- (a) 13.
- (b) 17.
- (c) 19.
- (d) 23.

12. El número de pares ordenados de enteros positivos (x, y) tales que $\frac{xy}{x+y} = 10$ es igual a

- (a) 3.
- (b) 5.
- (c) 7.
- (d) 9.

13. Eduardo, Jennifer y Santiago son amigos y acaban de conocer a Helen en un concurso. Ellos no le dicen a Helen sus edades, pero le dicen lo siguiente:

- Dos veces la de Eduardo, una vez la de Jennifer y cuatro veces la de Santiago suman 205.
- Cinco veces la de Eduardo, siete veces la de Jennifer y una vez la de Santiago suman 382.

Sea S la suma de las edades de Eduardo, Jennifer y Santiago. Con base en la información anterior, se puede afirmar que Helen:

- (a) no puede determinar el valor exacto de S .
- (b) puede determinar que $S = 84$.
- (c) puede determinar que $S = 86$.
- (d) puede determinar que $S = 88$.

14. Sea $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función continua tal que $f(x)f(2-x) = 1$ para todo $x \in [0, 2]$. En relación con la integral

$$\int_0^2 \frac{1}{1+f(x)} dx$$

se puede afirmar que

- (a) no es posible determinar su valor.
- (b) se puede determinar su valor y es menor que 1.
- (c) se puede determinar su valor y es igual a 1.
- (d) se puede determinar su valor y es mayor que 1.

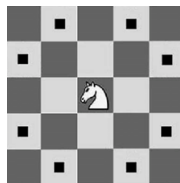
15. Eduardo tiene n cartas enumeradas del 1 al n y las baraja aleatoriamente. Decimos que la carta de arriba está en la posición 1, la siguiente en la posición 2, y así sucesivamente hasta que la carta de abajo está en la posición n . Eduardo observa que hay exactamente 5 cartas que tienen el mismo número de la posición que ocupan. Eduardo saca la carta en la posición 5 y la coloca abajo del mazo (posición n), y luego saca la carta en la posición 4 y la coloca arriba del mazo (posición 1). Después de hacer esto se da cuenta que hay al menos 5 cartas que ocupan la posición del número que llevan escrito. ¿Cuál es el menor valor que puede tomar n para que esto sea posible?

- (a) 10
- (b) 11
- (c) 12
- (d) 13

16. Sea $f : [-25, 25] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y considere la ecuación $f(x) = \tan x$. ¿Cuál es la menor cantidad de soluciones que puede tener la ecuación?

- (a) 10
- (b) 15
- (c) 20
- (d) 25

17. Juan Gabriel tiene un tablero de ajedrez de 3×2025 con 3 filas y 2025 columnas. Lo enrolla en forma cilíndrica de manera que la columna 1 y la columna 2025 quedan adyacentes y no se traslapan. En la figura se muestra un tablero usual de ajedrez con las posiciones de ataque de un caballo. ¿Cuál es la mayor cantidad de caballos que Juan Gabriel puede colocar en el tablero cilíndrico sin que dos de ellos se ataquen?



- (a) 3034
 (b) 3035
 (c) 3036
 (d) 3037
18. Héctor tiene un juego en el Paseo de los Turistas para familias de tres o cuatro miembros, donde usa una urna que contiene seis pelotas blancas y cuatro pelotas anaranjadas. Hay dos tipos de jugadas, donde una jugada consiste en sacar una pelota y luego hacer alguna de las siguientes acciones: devolver la pelota a la urna (tipo A) o eliminar la pelota del juego (tipo B). La familia escoge un único tipo de jugada (para todo el juego) y realiza cinco jugadas, una a la vez. De las cinco pelotas tomadas, se cuenta la cantidad de veces que apareció una pelota anaranjada. Si esta cantidad coincide con el número de miembros de la familia, entonces Héctor le regala un helado a todos; en caso contrario, les cobra el doble del precio de los helados.

Considere las siguientes afirmaciones:

- (I) Para una familia de tres miembros es más favorable escoger el tipo A que el tipo B.
 (II) Para una familia de cuatro miembros es más favorable escoger el tipo B que el tipo A.

De las afirmaciones anteriores, ¿cuáles son verdaderas?

- (a) Ninguna
 (b) Solo la I
 (c) Solo la II
 (d) Ambas
19. La cantidad de ceros en la que termina el número $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot 1000^{1000}$ es igual a
- (a) 126125.
 (b) 311250.
 (c) 494515.
 (d) 499432.
20. Sea $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $\cos \alpha = \frac{24}{25}$. Con respecto a los números $C = \cos(1000\alpha)$ y $S = \sin(1000\alpha)$ se puede afirmar que
- (a) ninguno es racional.
 (b) solo C es un número racional.
 (c) solo S es un número racional.
 (d) ambos son racionales.