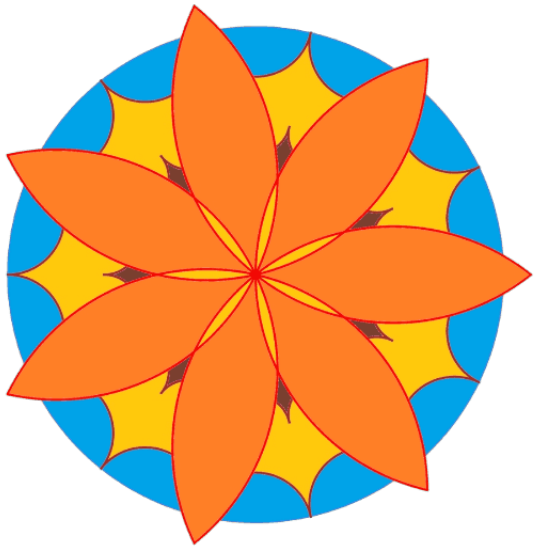
I Concurso de Matemática Universitaria

Miércoles 24 de abril del 2024



A la memoria de William Alvarado Jiménez,
un mentor y un amigo del ECM.

Instrucciones:

- La participación en el CoMUn es individual.
- Esta es una prueba con 20 preguntas de selección única, todas con el mismo valor.
- En la hoja de respuestas debe marcar exactamente una opción por cada pregunta.
- Dispone de 3 horas para completar el examen. Al acabar este tiempo, tendrá 5 minutos para completar y revisar la hoja de respuestas.
- Se permite el uso de artículos generales para escribir, por ejemplo lápices, lapiceros y marcadores.
- No se permite el uso de material adicional (apuntes, libros, etc), calculadoras, ni dispositivos electrónicos.

1. El número de soluciones de la ecuación $\operatorname{sen}(e^x) = 0$ en el intervalo $[0, 6\ln(2)]$ es
   (a) 20.
   (b) 21.
   (c) 22.
   (d) 23.

2. Un grupo de estudiantes se reúne regularmente para celebrar sus cumpleaños y ordenan comida. En varias ocasiones han ordenado las siguientes combinaciones:
   - una pizza, una ensalada, tres refrescos y tres postres por 10 000 colones,
   - dos pizzas, cuatro ensaladas, tres refrescos y cinco postres por 20 000 colones,
   - tres pizzas, dos ensaladas, doce refrescos y diez postres por 32 000 colones.

   Los precios no están sujetos a ninguna promoción. Con base en lo anterior, el grupo puede determinar con total certeza el precio de
   (a) una pizza.
   (b) una ensalada.
   (c) un refresco.
   (d) un postre.

3. En el espacio, sea T un tetraedro regular. Considere las siguientes afirmaciones:
   (I) Existe un plano que interseca el interior de cinco aristas de T.
   (II) Existe un plano que interseca el interior de las cuatro caras de T.

   ¿Cuáles de las afirmaciones son verdaderas?
   (a) Ninguna.
   (b) Sola la I.
   (c) Solo la II.
   (d) Ambas.

4. Considere el conjunto
$$A = \left\{ \frac{n}{50} + \frac{200}{n} : 1 \leq n \leq 200, n \in \mathbb{N} \right\}.$$
   El menor elemento de A se encuentra en el intervalo:
   (a) $(0, 2]$.
   (b) $(2, 4]$.
   (c) $(4, 6]$.
   (d) $(6, 10]$.

5. Considere el triángulo formado por los puntos $A = (0,0)$, $B = (96,0)$ y $C = (0,48)$. Se sabe que existe un único punto $P = (x,y)$ en el interior del triángulo ABC tal que las áreas de los triángulos ABP, ACP, BCP están en razón $1:2:3$. El valor de $|x-y|$ corresponde a
   (a) 12.
   (b) 16.
   (c) 20.
   (d) 24.

6. Considere todos los números de nueve dígitos formados al usar los dígitos $1,2,\ldots,9$ sin repetir; por ejemplo, 123459876. ¿Cuál es la probabilidad que al escoger aleatoriamente uno de estos números se obtenga un múltiplo de 4?
   (a) 2/9.
   (b) 17/72.
   (c) 1/4.
   (d) 19/72.

7. Para $x \in [0,\pi]$, el valor mínimo que toma la función $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$ es
   (a) -2.
   (b) $-\sqrt{3}$.
   (c) -1.
   (d) -0.

8. Sea P el conjunto de polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual que 10. Considere el conjunto $\{p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{10}\}$ donde los polinomios están definidos por $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}x^k$; por ejemplo, $p_0(x) = 1$ y $p_4(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$. Existen números reales únicos $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{10}$ tales que

$$x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1 = c_0p_0(x) + c_1p_1(x) + c_2p_2(x) + \cdots + c_{10}p_{10}(x).$$

   El valor de $|c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_{10}|$ es igual a
   (a) 9.
   (b) 11.
   (c) 13.
   (d) 15.

9. En un reloj analógico usual, las agujas de las horas y los minutos se mueven de forma continua a velocidad constante (aunque las dos velocidades son distintas). Entre las 12:00 a.m. y las 12:00 p.m., la cantidad de veces que las agujas son perpendiculares entre sí es igual a
   (a) 11.
   (b) 12.
   (c) 22.
   (d) 24.

10. En una competencia de baile participan 50 parejas, entre ellas Jennifer y Santiago. Al llegar al salón algunas de estas personas se saludan dándose la mano; nadie saluda a su pareja (porque ya se conocen), ni se saluda a sí mismo. Santiago pregunta a las otras 99 personas por la cantidad de veces que saludaron y obtiene 99 respuestas distintas. La cantidad de personas a las que saludó Jennifer es igual a

    (a) 1.
    (b) 49.
    (c) 50.
    (d) 98.

11. Todas las casillas de un tablero 4×4 se llenan con los números $1, 2, 3, 4$. Decimos que el tablero es un *sudoku* si en cada fila, en cada columna, y en los cuatro bloques esquineros 2×2 aparecen los cuatro números $1, 2, 3, 4$. En los siguientes ejemplos, el primero es un tablero sudoku, pero el segundo no lo es:

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	1	2
1	3	4	2
4	1	2	3

La cantidad de tableros sudokus 4×4 es igual a

    (a) 144.
    (b) 216.
    (c) 288.
    (d) 360.

12. Santiago camina sobre los números enteros tirando una moneda justa. Cuando se encuentra en el entero n, si sale escudo se mueve al entero anterior $(n-1)$ y si sale corona se mueve al entero siguiente $(n+1)$. Si Santiago empieza en 0 y tira la moneda 7 veces, entonces

    (a) la probabilidad de encontrarse en un entero $3k$ es $1/3$.
    (b) es más probable que se encuentre en un entero $3k$ que en un entero $3k+1$.
    (c) es más probable que se encuentre en un entero $3k+1$ que en un entero $3k+2$.
    (d) es más probable que se encuentre en un entero $3k+2$ que en un entero $3k$.

Nota: Decimos que un entero n es $3k+r$ si existe un entero k tal que $n = 3k+r$. Por ejemplo, 9 es $3k$ porque $9 = 3 \cdot 3$, 7 es $3k+1$ porque $7 = 3 \cdot 2 + 1$ y -4 es $3k+2$ porque $-4 = 3 \cdot (-2) + 2$.

13. El valor de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{e^x + e^{-x}} dx$$

es igual a

    (a) π.
    (b) e.
    (c) e^{π}.
    (d) $\sqrt{e \cdot \pi}$.

14. Un número complejo z cumple que $z + z^{-1} = 1$. El valor de $z^{2024} + z^{-2024}$ es igual a
    (a) -2.
    (b) -1.
    (c) 1.
    (d) 2.

15. Sea $\omega = e^{2\pi i/3} = (-1 + i\sqrt{3})/2$ y considere el polinomio

$$P(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + 2024x^{2023}.$$

El valor de $P(\omega)$ es igual a
    (a) $-672i\sqrt{3}$.
    (b) $673i\sqrt{3}$.
    (c) $-674i\sqrt{3}$.
    (d) $675i\sqrt{3}$.

16. La sucesión de Fibonacci se define mediante $F_1 = F_2 = 1$ y la relación $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para $n \geq 3$, de forma que los primeros términos de la sucesión son $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13, \ldots$. El valor de la serie

$$\frac{F_1}{2} + \frac{F_2}{2^2} + \frac{F_3}{2^3} + \frac{F_4}{2^4} + \ldots$$

es igual a
    (a) $3/2$.
    (b) $(1 + \sqrt{5})/2 = 1,618\ldots$.
    (c) $4/\sqrt{5} = 1,788\ldots$.
    (d) 2.

17. Una sucesión de enteros inicia con los números 1 y 3, en ese orden, y los términos siguientes se obtienen sumando los dos anteriores; de esta forma, los términos de la sucesión son $1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \ldots$. Considere las siguientes afirmaciones sobre esta sucesión:
    (I) Algún término de la sucesión es divisible por 10.
    (II) Algún término de la sucesión es divisible por $2^{10} = 1024$.

¿Cuáles de las afirmaciones son verdaderas?
    (a) Ninguna.
    (b) Sola la I.
    (c) Solo la II.
    (d) Ambas.

18. Jennifer tira una moneda justa y se detiene cuándo le aparecen dos escudos de forma seguida. El valor esperado para la cantidad de tiros que Jennifer tendrá que hacer para detenerse es

   (a) 4.
   (b) 5.
   (c) 6.
   (d) 7.

19. Los números reales positivos a y b son tales que $ab = 2024$ y el límite

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{a}{x^{22} - 1} - \frac{b}{x^{23} - 1} \right)$$

   existe (es decir, su valor es un número real). Entonces el valor de $a + b$ es

   (a) 90.
   (b) 100.
   (c) 110.
   (d) 120.

20. Tres ciudades A, B, C están unidas por un camino circular y están ordenadas como $A - B - C$ en sentido antihorario. Al final de cada mes, la población de cada ciudad se desplaza de la siguiente manera:

   - 1/3 permanece en la misma ciudad,
   - 1/2 se desplaza a la ciudad siguiente en sentido antihorario (por ejemplo, la de A pasa a B),
   - 1/6 se desplaza a la ciudad siguiente en sentido horario (por ejemplo, la de A pasa a C).

   Originalmente toda la población se encuentra en A. Adicionalmente, suponemos que no hay nacimientos ni fallecimientos, y los desplazamientos se pueden hacer de forma exacta. Considere las siguientes afirmaciones:

   (I) Despúes de cualquier cantidad par de meses, las poblaciones en B y C son iguales.
   (II) Después de una cantidad de meses divisible por 3, la mayoría de la población estará en A.

   ¿Cuáles de las afirmaciones son verdaderas?

   (a) Ninguna.
   (b) Sola la I.
   (c) Solo la II.
   (d) Ambas.