XXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria 2024

Problema 1. Sean $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ sucesiones de reales positivos. Sean $O = (0,0)$, $A_n = (a_n, 0)$ y $B_n = (0, b_n)$ para todo $n \geq 1$. Se construye C_n como la intersección de la recta $y = x$ con el segmento A_nB_n y se definen c_n y d_n como las medidas de los segmentos OC_n y A_nB_n, respectivamente. Suponga que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n} = 2024$. Demuestre que la serie $D = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d_n}$ converge y determine todos los posibles valores de D.

Solución. Empezamos determinando las coordenadas de C_n. Como el punto pertenece a la recta $y = x$, entonces tiene la forma (c, c). Además, como A_n, B_n y C_n son colineales, entonces se cumple que

$$\frac{c-0}{c-a_n} = \frac{c-b_n}{c-0} \Longrightarrow (c-a_n)(c-b_n) = c^2 \Longrightarrow c = \frac{a_nb_n}{a_n+b_n} = \frac{1}{a_n^{-1}+b_n^{-1}}.$$

Con base en esto, procedemos a comparar c_n y d_n. Por el teorema de Pitágoras sabemos que $c_n = c\sqrt{2}$ y $d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Por la desigualdad entre la media cuadrática y la media armónica sabemos que para cualesquiera reales positivos x, y se cumple que

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{2}{x^{-1}+y^{-1}},$$

con lo cual concluimos que $d_n \geq 2c_n$, y por lo tanto $\dfrac{1}{2c_n} \geq \dfrac{1}{d_n}$. Por el criterio de comparación, deducimos que la serie D converge y que $D \leq 1012$.

Ahora vamos a demostrar que D puede tomar cualquier valor en $(0, 1012]$. Para esto, probaremos que el rango del cociente $q_n = c_n/d_n$ es $(0, 1/2]$. Sea $r_n = b_n/a_n$, de forma que

$$q_n = \frac{a_nb_n\sqrt{2}}{(a_n+b_n)\sqrt{a_n^2+b_n^2}} = \frac{r_n\sqrt{2}}{(1+r_n)\sqrt{1+r_n^2}}.$$

Anteriormente probamos que $q_n \leq 1/2$, y $r_n = 1$ alcanza esta igualdad. Además, el cociente tiende a 0 cuando r_n tiende a 0^+ o $+\infty$. Como la función es continua, entonces el rango de q_n es $(0, 1/2]$.

Dado $q \in (0, 1/2]$, tomamos $r > 0$ tal que $q = r\sqrt{2}/((1+r)\sqrt{1+r^2})$. Dada una sucesión $\{a_n\}$, definimos otra sucesión $\{b_n\}$ mediante $b_n = ra_n$. De esta forma,

$$c_n = \frac{a_nr\sqrt{2}}{1+r}, \quad d_n = a_n\sqrt{1+r^2} \implies \frac{1+r}{r\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n} = 2024, \quad D = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}.$$

Si $\{a_n\}$ es cualquier sucesión para la cual la serie de sus recíprocos converge, entonces $D = 2024q$, con lo cual concluimos que D puede tomar cualquier valor en $(0, 1012]$.

Problema 2. Sea N un entero positivo y considere el polinomio $P(x) = x\prod_{k=1}^{N}(x^2 - k^2)$. Sea A_n el área comprendida entre el gráfico de $|P(x)|$ y el eje x, con $x \in [n-1, n]$. Demuestre que $A_1 < A_2 < \ldots < A_N$.

Solución. Empezamos notando que si $0 \leq x \leq N-1$, entonces

$$P(x+1) = \frac{x+N+1}{x-N}P(x) \Longrightarrow |P(x+1)| = |P(x)| \cdot \frac{x+N+1}{N-x} \geq |P(x)|.$$

Además, la desigualdad es estricta si x no es entero. Integrando esta desigualdad en $[n-1, n]$ concluimos que $A_{n+1} > A_n$.

Comentario: Es posible refinar la desigualdad entre las áreas y obtener otras en el sentido contrario. Por ejemplo, podemos empezar observando que la función $(x+N+1)/(N-x)$ es creciente si $0 \leq x \leq N-1$. En particular, en el intervalo $(n-1, n)$ se cumple que

$$\frac{N+n}{N-n+1} < \frac{x+N+1}{N-x} < \frac{N+n+1}{N-n},$$

con lo cual obtenemos que $\frac{N+n}{N-n+1}A_n < A_{n+1} < \frac{N+n+1}{N-n}A_n$. Con esto podemos deducir que

$$\binom{2N}{N}A_1 < \binom{2N}{N-1}A_2 < \cdots < \binom{2N}{1}A_N,$$

$$\binom{2N}{0}A_N < \binom{2N}{1}A_{N-1} < \cdots < \binom{2N}{N-1}A_1.$$

Problema 3. Sea n un entero positivo y sea $\mathbb{R}^{n\times n}$ el espacio de matrices $n \times n$ con entradas reales. Para $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se define un *alternante* como un producto de una cantidad finita de factores que alternan entre A y B; por ejemplo, A, $ABAB$ y $BABAB$ son *alternantes* de A y B. Determine el mayor valor de n para el que existen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que sus alternantes generan el espacio $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Solución. Sea V el espacio generado por los alternantes de A y B. Empezaremos acotando la cantidad de alternantes linealmente independientes, es decir, acotaremos la dimensión de V. Notemos que los alternantes se pueden escribir de alguna de las siguientes cuatro formas:

$$(AB)^{k+1} = (AB)^k AB, \quad (BA)^{k+1} = B(AB)^k A, \quad (AB)^k A, \quad B(AB)^k,$$

con k un entero no negativo. Por el teorema de Cayley-Hamilton, cualquier potencia $(AB)^k$ con $k \geq n$ se puede expresar como una combinación de las matrices $\{I, AB, (AB)^2, \ldots, (AB)^{n-1}\}$. Esto implica que V es generado por el conjunto de $4n$ matrices

$$\{AB, (AB)^2, \ldots, (AB)^n, BA, (BA)^2, \ldots, (BA)^n, A, ABA, \ldots, (AB)^{n-1}A, B, BAB, \ldots, B(AB)^{n-1}\},$$

es decir, $\dim V \leq 4n$.

Probaremos que no es posible tener $\dim V = 4n$. Para esto vamos a demostrar un resultado ligeramente más general: si $C, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces el conjunto $S = \{C, \dots, C^n, D, \dots, D^n\}$ es linealmente dependiente. Consideramos los polinomios característicos de estas matrices:

$$p_C(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0, \quad p_D(x) = x^n + d_{n-1}x^{n-1} + \cdots + d_0.$$

Si $c_0 = 0$, entonces el teorema de Cayley-Hamilton nos dice que $\{C, C^2, \dots, C^n\} \subseteq S$ es linealmente dependiente. En el caso $c_0 \neq 0$, nuevamente por el teorema de Cayley-Hamilton, sabemos que

$$c_0(D^n + d_{n-1}D^{n-1} + \cdots + d_1D) = d_0(C^n + c_{n-1}C^{n-1} + \cdots + c_1C) = -c_0d_0I,$$

con lo cual obtenemos que $c_0(D^n + d_{n-1}D^{n-1} + \cdots + d_1D) - d_0(C^n + c_{n-1}C^{n-1} + \cdots + c_1C) = 0$, siendo esta una combinación lineal no trivial (porque $c_0 \neq 0$ es el coeficiente de D^n).

Usando el resultado anterior con $C = AB$ y $D = BA$, obtenemos que $\dim V < 4n$. Como buscamos que $V = \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces debemos tener $n^2 < 4n$, con lo cual deducimos que $n \leq 3$.

Finalmente, para $n = 3$, podemos considerar

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow AB = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Si a, b, c son distintos, entonces el polinomio minimal de $C = AB$ tiene grado 3. Esto implica que si M es una matriz invertible, entonces las matrices M, CM y C^2M son linealmente independientes (en caso contrario obtenemos una ecuación $(pI + qC + rC^2)M = 0$, la cual contradice la invertibilidad de M o la condición del polinomio minimal de C). Además, si a, b, c son todos distintos de 0, entonces A, B y $C = AB$ son todas invertibles. Esto dice que cada uno los conjuntos $S_A = \{A, CA, C^2A\}$, $S_B = \{B, CB, C^2B\}$ y $S_C = \{C, C^2, C^3\}$ es linealmente independiente. Por la forma de estas matrices, es fácil ver que los espacios generados por S_A, S_B, S_C son independientes, con lo cual el conjunto de alternantes $S_A \cup S_B \cup S_C$ genera $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

Problema 4. Dada una matriz M con entradas reales, sea $\|M\|$ el máximo de los valores absolutos de sus entradas. Demuestre que para todo real $K > 1$, existen una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y enteros positivos m, n tales que $\|A\| = 1$, $\|A^m\| > K$ y $\|A^n\| < 1/K$.

Solución. Sea $c \in (0, 1)$ y consideremos la matriz $A_c = \begin{pmatrix} c & 1 \\ 0 & c \end{pmatrix}$, de forma que $\|A\| = 1$. Es sencillo demostrar por inducción que para todo entero positivo n se cumple que

$$A_c^n = \begin{pmatrix} c^n & nc^{n-1} \\ 0 & c^n \end{pmatrix}.$$

Con esto tenemos que $\|A_c^n\| = \max\{nc^{n-1}, c^n\} = nc^{n-1}$. Como $\lim_{n\to\infty} nc^{n-1} = 0$, entonces concluimos que para todo $c \in (0, 1)$, existe $N = N(c)$ tal que si $n \geq N$, entonces se cumple que $\|A_c^n\| < 1/K$.

Para la desigualdad $\|A_c^m\| > K$, podemos requerir que $m > 2K$ y $c^{m-1} \geq 1/2$, es decir, $c \in (2^{-1/(m-1)}, 1)$. De esta forma concluimos que $\|A_c^m\| = mc^{m-1} > (2K) \cdot (1/2) = K$.

Problema 5. Sea C el conjunto de todos los enteros positivos n tales que si p es un primo que divide a n, entonces p^2 también divide a n; por ejemplo, $\{1, 27, 72\} \subseteq C$ y $2024 \notin C$. Sea $\varphi(n)$ la cantidad de enteros positivos menores o iguales que n que son coprimos con n.

1. Demuestre que la serie $S = \displaystyle\sum_{n \in C} \frac{1}{n}$ converge.
2. Demuestre que para todo $\alpha > 0$ la serie $S(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}\varphi(n)}$ converge y que $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0^+} \alpha \cdot S(\alpha) = S$.

Solución 1. En primer lugar observamos que como la serie es de términos positivos, entonces podemos hacer reacomodos de la serie sin alterar su convergencia (o divergencia). Además, podemos notar que si definimos $f(n)$ como $1/n$ si $n \in C$ y 0 si $n \notin C$, entonces f es una función multiplicativa (es decir, si m y n son coprimos, entonces $f(mn) = f(m)f(n)$). Por lo tanto, la serie $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ se puede factorizar como un producto sobre el conjunto $\mathcal{P}$ de los números primos:

$$
\begin{aligned}
S = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) &= \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 + f(p) + f(p^2) + f(p^3) + \cdots\right) \\
&= \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 + 0 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \cdots\right) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 + \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{1 - p^{-1}}\right) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right).
\end{aligned}
$$

Adicionalmente, podemos ver que $\displaystyle\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p(p-1)} \leq \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{C}{p^2} < \infty$, con lo cual concluimos que el producto infinito converge y por lo tanto la serie S también.

El argumento para las series de la segunda parte es análogo, pues todas son series de términos positivos de funciones multiplicativas, con lo cual las series se pueden factorizar como un producto sobre $\mathcal{P}$. Si $f_{\alpha}(n) = 1/(n^{\alpha}\varphi(n))$, entonces $f_{\alpha}(p^k) = 1/[(1 - p^{-1})p^{(\alpha+1)k}]$, y obtenemos así la factorización

$$
\begin{aligned}
S(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{\alpha}(n) &= \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 + f_{\alpha}(p) + f_{\alpha}(p^2) + f_{\alpha}(p^3) + \cdots\right) \\
&= \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 + \frac{1}{1 - p^{-1}} \left(\frac{1}{p^{\alpha+1}} + \frac{1}{p^{2(\alpha+1)}} + \frac{1}{p^{3(\alpha+1)}} + \cdots\right)\right) \\
&= \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 + \frac{1}{1 - p^{-1}} \cdot \frac{1}{p^{\alpha+1} - 1}\right) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{p^{\alpha+2} - p^{\alpha+1} + 1}{(p-1) \cdot (p^{\alpha+1} - 1)}.
\end{aligned}
$$

En este momento podemos ver que si $\alpha > 0$, entonces $\displaystyle\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-1}} \cdot \frac{1}{p^{\alpha+1} - 1} \leq \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{C}{p^{\alpha+1}} < \infty$, con lo cual concluimos que el producto infinito converge y por lo tanto la serie $S(\alpha)$ también.

De forma similar, podemos usar que la función zeta de Riemann también admite una factorización sobre $\mathcal{P}$

$$
\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots\right) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 + \frac{1}{p^s - 1}\right) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{p^s}{p^s - 1},
$$

para deducir que

$$\frac{S(\alpha)}{\zeta(\alpha+1)} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{p^{\alpha+2}-p^{\alpha+1}+1}{(p-1)\cdot(p^{\alpha+1}-1)} \cdot \frac{p^{\alpha+1}-1}{p^{\alpha+1}} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{p^{\alpha+2}-p^{\alpha+1}+1}{p^{\alpha+1}(p-1)} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1+\frac{1}{p^{\alpha+1}(p-1)}\right).$$

Esto implica que

$$\alpha \cdot S(\alpha) = (\alpha\cdot\zeta(\alpha+1)) \cdot \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1+\frac{1}{p^{\alpha+1}(p-1)}\right).$$

Es conocido que el límite del primer factor es igual a 1 cuando $\alpha \to 0^+$. En relación con el segundo producto, observamos que los términos $1/(p^{\alpha+1}(p-1))$ crecen conforme α decrece, por lo cual el límite de la segunda expresión cuando $\alpha \to 0^+$ es igual a

$$\prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1+\frac{1}{p(p-1)}\right) = S,$$

como queríamos probar.

Comentario: Podemos observar que

$$1+\frac{1}{p(p-1)} = \frac{p^2-p+1}{p(p-1)} = \frac{p^2}{p^2-1}\cdot\frac{p^3}{p^3-1}\cdot\left(\frac{p^6}{p^6-1}\right)^{-1},$$

con lo cual $S = \zeta(2)\zeta(3)/\zeta(6) = 315\zeta(3)/(2\pi^4) = 1,943596\ldots$.

Solución 2. Damos una prueba alternativa de la convergencia de la serie $S(\alpha)$. Podemos usar el hecho conocido que $0 < \liminf \frac{\varphi(n)}{n}\log\log n < \infty$ (F. Brochero, C.G. Moreira, N.C. Saldanha, E. Tengan, *Teoria dos Números*, Proposición 5.30). Es decir, existe una constante $C > 0$ y $N > 0$, tal que si $n \geq N$, entonces

$$\frac{1}{C} < \frac{\varphi(n)}{n}\log\log n \Longrightarrow \frac{1}{n^\alpha\varphi(n)} \leq \frac{C\log\log n}{n^{1+\alpha}}.$$

Con esto deducimos que la serie $S(\alpha)$ converge por el criterio de comparación.

Problema 6.

Sean $r < s$ enteros positivos. Sean $P(z) = a_r z^r + \cdots + a_0$ y $Q(z) = b_s z^s + \cdots + b_0$, con $a_r, b_s \neq 0$, tales que $|P(z)| \leq |Q(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$. Suponga que todas las raíces de $Q(z)$ pertenecen al disco $|z| \leq 1$. Demuestre que $\max(|a_0|, |a_r|) \leq |b_s| - |b_0|$.

Solución 1. La conclusión del problema sugiere el siguiente resultado que usaremos en la solución: si un polinomio $R(z) = r_n z^n + \ldots + r_0$, con $r_n \neq 0$, tiene todas sus raíces en el disco $|z| \leq 1$, entonces $|r_0| \leq |r_n|$. Este hecho es consecuencia directa de las fórmulas de Vieta.

Para resolver el problema, primero vamos a suponer que todas las s raíces de $Q(z)$ se encuentran en el disco abierto $|z| < 1$; en particular, $|Q(z)| \neq 0$ para $|z| = 1$. Consideramos el polinomio $P_\alpha(z) = \alpha P(z)$, con $|\alpha| < 1$ por determinar. De esta forma, para $|z| = 1$ se cumple que

$$|Q(z)| > |\alpha||Q(z)| \geq |\alpha||P(z)| = |P_\alpha(z)|.$$

Por el teorema de Rouché, obtenemos que $Q(z) - P_\alpha(z)$ tiene s raíces en el disco abierto $|z| < 1$; es decir, el polinomio tiene todas sus raíces en $|z| < 1$. El coeficiente principal de este polinomio es b_s (por la hipótesis $s > r$) y el coeficiente constante es $b_0 - \alpha a_0$. Usando la observación del inicio de la solución deducimos que $|b_0 - \alpha a_0| \leq |b_s|$. Podemos escoger un valor apropiado de la fase de α de manera que $|b_0 - \alpha a_0| = |b_0| + |\alpha||a_0|$, con lo cual obtenemos que $|b_0| + |\alpha||a_0| \leq |b_s|$. Tomando $|\alpha| \to 1$, concluimos que $|a_0| \leq |b_s| - |b_0|$.

Vamos a usar este resultado para demostrar la otra desigualdad. Para esto consideramos el polinomio $p(z) = z^r \overline{P(1/\overline{z})} = \overline{a_r} + \overline{a_{r-1}} z + \ldots + \overline{a_0} z^r$, donde ahora $\overline{a_r}$ es el coeficiente constante. Observamos que $|p(z)| \leq |Q(z)|$ si $|z| = 1$ y que $\mathrm{gr}(p) \leq r < s$, con lo cual podemos concluir que $|a_r| \leq |b_s| - |b_0|$.

Finalmente, consideramos el caso en que $Q(z)$ tenga ceros en $|z| = 1$. Si $Q(z_0) = 0$ y $|z_0| = 1$, entonces la hipótesis $|P(z)| \leq |Q(z)|$ implica que $P(z_0) = 0$; es más, si p y q son el orden de z_0 en P y Q, respectivamente, entonces la misma hipótesis implica que $p \geq q$. Esto quiere decir, que si escribimos $Q(z) = Q^*(z)R(z)$ de forma que Q^* tiene todos sus ceros en $|z| < 1$ y $R(z)$ tiene todos sus ceros en $|z| = 1$, entonces R también divide a P; es decir, $P(z) = P^*(z)R(z)$ para cierto polinomio $P^*(z)$. Un argumento de continuidad implica que la desigualdad $|P^*(z)| \leq |Q^*(z)|$ se cumple en $|z| = 1$. Dado que $\mathrm{gr}(P^*) < \mathrm{gr}(Q^*)$ y Q^* tiene todas sus raíces en $|z| < 1$, entonces podemos aplicar los resultados anteriores al par de polinomios P^* y Q^*. Lo que resta es observar que como las raíces de $R(z)$ están en $|z| = 1$, entonces los valores absolutos de los coeficientes principales y los coeficientes constantes de P y Q coinciden con los de P^* y Q^*, respectivamente, y así finaliza la prueba.

Solución 2. Presentamos una demostración alternativa a la desigualdad $|a_r| \leq |b_s| - |b_0|$ (bajo la hipótesis que Q no se anula en $|z| = 1$). Podemos observar que si $|z| = 1$, entonces se cumple que

$$|Q(z)| > |\alpha||Q(z)| \geq |\alpha||P(z)| = |z^{s-r} P_\alpha(z)|,$$

donde $P_\alpha(z) = \alpha P(z)$. Por el teorema de Rouché, obtenemos que $Q(z) - z^{s-r} P_\alpha(z)$ tiene s raíces en el disco abierto, con lo cual el polinomio es de grado s para todo $|\alpha| < 1$. Esto implica que el coeficiente principal $b_s - \alpha a_r$ no se anula y por lo tanto $|b_s| \geq |a_r|$. Podemos escoger un valor apropiado de la fase de α y usar que $|b_s| \geq |a_r|$, para obtener que $|b_s - \alpha a_r| = |b_s| - |\alpha||a_r|$. Como b_0 es el coeficiente constante de $Q(z) - z^{s-r} P_\alpha(z)$ (por la hipótesis $s > r$), entonces la observación del inicio de la solución anterior nos permite deducir que que $|b_0| \leq |b_s| - |\alpha||a_r|$. Tomando $|\alpha| \to 1$, concluimos que $|a_r| \leq |b_s| - |b_0|$.

Solución 3. Consideramos los polinomios $P_1(z) = \overline{P(\overline{z})}$, $P_2(z) = z^r P(1/z)$ y $Q^*(z) = z^r Q(1/z)$, es decir,

$$P_1(z) = \overline{a_0} + \cdots + \overline{a_r} z^r, \qquad P_2(z) = a_r + \cdots + a_0 z^r, \qquad Q^*(z) = b_s + \cdots + b_0 z^s.$$

Primero notamos que Q^* no se anula en $|z| < 1$, de forma que las funciones $F_j(z) = P_j(z)/Q^*(z)$ son analíticas en $|z| < 1$. Además, podemos observar que $|P_j(z)| \leq |Q^*(z)|$ para $|z| = 1$, con lo cual deducimos que si $Q^*(z_0) = 0$ y $|z_0| = 1$, entonces $P_j(z_0) = 0$; es más, si p y q son el orden de z_0 en P_j y Q^*, respectivamente, entonces la misma condición implica que $p \geq q$. Esto nos dice que $F_j(z)$ es analítica en $|z| \leq 1$ y $|F_j(z)| \leq 1$ para $|z| = 1$. El principio del módulo máximo implica que $|F_j(z)| \leq 1$ para todo $|z| \leq 1$; es decir, $|P_j(z)| \leq |Q^*(z)|$ para todo $|z| \leq 1$. En particular, para $z = 0$, obtenemos que $\max\{|a_0|, |a_r|\} \leq |b_s|$.

El resultado anterior resuelve el problema en el caso $b_0 = 0$; suponemos entonces que $b_0 \neq 0$. Consideramos el polinomio $R_\alpha(z) = Q^*(z) - \alpha P_j(z)$, con $|\alpha| < 1$ por determinar. El hecho que Q^* no se anule en $|z| < 1$ y la condición $|P_j(z)| \leq |Q^*(z)|$ para $|z| \leq 1$ implican que R_α tiene todas sus raíces en $|z| \geq 1$. Además su coeficiente principal es b_0 y su coeficiente constante es $b_s - \alpha P_j(0)$, por lo que las fórmulas de Vieta implican que $|b_s - \alpha P_j(0)| \geq |b_0|$. Podemos escoger apropiadamente la fase de α y usar que $|b_s| \geq |P_j(0)|$ para obtener que $|b_s - \alpha P_j(0)| = |b_s| - |\alpha||P_j(0)|$. Con esto deducimos que $|\alpha||P_j(0)| \leq |b_s| - |b_0|$, y tomando $|\alpha| \to 1$ concluimos el resultado.

Comentario: Mediante argumentos similares podemos probar que $|a_0| + |a_r| \leq |b_0| + |b_s|$ si $r = s$ y $|a_0| + |a_r| \leq |b_s|$ si $r > s$.

Problema 7. Demuestre que la ecuación $x^3 + 2y^3 + 3z^3 = 4$ tiene infinitas soluciones con x, y, z números racionales.

Solución 1. La idea para encontrar infinitos puntos con coordenadas racionales en la superficie $x^3 + 2y^3 + 3z^3 = 4$ es cortarla por un plano $ax + by + cz = d$ con $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ e intentar obtener infinitos puntos racionales en la nueva curva plana. Como esta curva está determinada por un polinomio de grado 3 con coeficientes en $\mathbb{Q}$, entonces es conveniente intentar que este polinomio tenga una raíz doble en algún punto racional, con lo cual la tercera raíz va a ser automáticamente racional. Geométricamente, lo anterior corresponde a escoger un plano de modo que sea tangente a la superficie en un punto racional.

Observamos que $P = (1, 0, 1)$ es un punto racional de la superficie. El vector normal a la superficie está dado por el gradiente

$$\nabla \left(x^3 + 2y^3 + 3z^3 - 4\right)\big|_P = \left(3x^2, 6y^2, 9z^2\right)\big|_P = (3, 0, 9),$$

con lo cual el plano tangente en $P = (1, 0, 1)$ tiene la ecuación

$$3 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 0) + 9 \cdot (z - 1) = 0 \Longleftrightarrow x + 3z = 4.$$

Por lo tanto, para encontrar infinitos puntos racionales en la curva

$$\begin{cases} x^3 + 2y^3 + 3z^3 = 4 \\ x + 3z = 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (4 - 3z)^3 + 2y^3 + 3z^3 = 4 \\ x + 3z = 4 \end{cases}$$

basta intersecar (en el plano yz) la curva plana $(4 - 3z)^3 + 2y^3 + 3z^3 = 4$ y la recta $z - 1 = ty$, que tiene pendiente racional $t \in \mathbb{Q}$ y pasa por $(y, z) = (0, 1)$ (la proyección de P). Observamos que por la construcción del plano, para t fijo, $y = 0$ es una raíz doble de la ecuación de grado 3. De hecho,

$$\begin{cases} (4 - 3z)^3 + 2y^3 + 3z^3 = 4 \\ z - 1 = ty \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (4 - 3(ty + 1))^3 + 2y^3 + 3(ty + 1)^3 = 4 \\ z = ty + 1 \end{cases}$$

Después de simplificar, obtenemos que la primera ecuación es equivalente a

$$\left(18t^2 + y - 12t^3 y\right) \cdot y^2 = 0 \Longleftrightarrow y = 0 \quad \text{o} \quad y = \frac{-18t^2}{1 - 12t^3},$$

y así concluimos que la ecuación del enunciado tiene infinitas soluciones racionales dadas por

$$(x, y, z) = \left(\frac{1 + 42t^3}{1 - 12t^3}, \frac{-18t^2}{1 - 12t^3}, \frac{1 - 30t^3}{1 - 12t^3}\right), \quad t \in \mathbb{Q}.$$

Solución 2. Usando que $1+2=3$ y considerando las variables r, s dadas por $x = r - z, y = s - z$, podemos observar que el coeficiente de z^3 se anula en la ecuación en r, s, z. Más precisamente, la ecuación se reescribe como

$$r^3 + 2s^3 - 3(r^2 + 2s^2)z + 3(r + 2s)z^2 = 4.$$

Además, si tomamos $r + 2s = 0$, entonces también se anula el coeficiente de z^2, con lo cual obtenemos la ecuación $-6s^3 - 18s^2 z = 4$. Por lo tanto, obtenemos las soluciones racionales dadas por

$$(x, y, z) = \left(\frac{-15s^3 + 2}{9s^2}, \frac{12s^3 + 2}{9s^2}, \frac{-3s^3 - 2}{9s^2} \right), \quad s \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}.$$