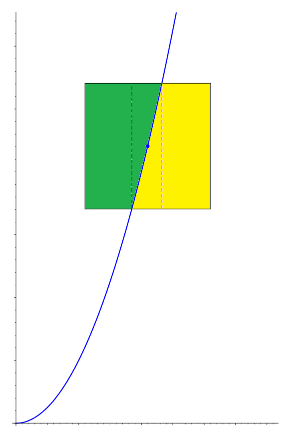
XXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria 2023

Problema 1. Dado un número real $t > 1$, sea C_t el cuadrado de lado 2 con centro (t, t^2) y lados paralelos a los ejes. Sea A_t el área de la región $C_t \cap \Gamma$, donde $\Gamma = \{(x, y) : y \geq x^2\}$. Calcule el límite de A_t cuando $t \to +\infty$.

Solución 1. Empezamos notando que $t-1 < \sqrt{t^2-1} < \sqrt{t^2+1} < t+1$, por lo que la curva $y = x^2$ interseca a los lados horizontales del cuadrado en los puntos $(\sqrt{t^2-1}, t^2-1)$ y $(\sqrt{t^2+1}, t^2+1)$.



Como la región $C_t \cap \Gamma$ contiene a un rectángulo $2 \times (\sqrt{t^2-1} - (t-1))$, entonces

$$A_t \geq 2(\sqrt{t^2-1} - (t-1)) = 2 - 2(t - \sqrt{t^2-1}).$$

De igual forma, la región $C_t \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$ contiene a un rectángulo $2 \times ((t+1) - \sqrt{t^2+1})$, por lo que

$$4 - A_t \geq 2((t+1) - \sqrt{t^2+1}) = 2 - 2(\sqrt{t^2+1} - t).$$

De esta forma obtenemos que

$$2 - 2(t - \sqrt{t^2-1}) \leq A_t \leq 2 + 2(\sqrt{t^2+1} - t).$$

Finalmente, observamos que

$$t - \sqrt{t^2-1} = \frac{1}{t + \sqrt{t^2-1}} \to 0, \quad \sqrt{t^2+1} - t = \frac{1}{\sqrt{t^2+1} + t} \to 0,$$

con lo cual concluimos que $A_t \to 2$ cuando $t \to +\infty$.

Solución 2. Al igual que en la solución anterior, obtenemos que la curva $y = x^2$ interseca a los lados horizontales del cuadrado. Si $r = \sqrt{t^2 - 1}$, $s = \sqrt{t^2 + 1}$, entonces

$$A_t = 2(r - (t - 1)) + \int_r^s (t^2 + 1 - x^2)dx = 2 - 2(t - r) + \int_r^s (t^2 + 1 - x^2)dx.$$

Empezamos observando que

$$s - r = \sqrt{t^2 + 1} - \sqrt{t^2 - 1} = \frac{2}{\sqrt{t^2 + 1} + \sqrt{t^2 - 1}} \to 0$$

cuando $t \to +\infty$. Como $r < t < s$, entonces $0 < t - r < s - r$. Además, para $r \leq x \leq s$ tenemos que $0 \leq t^2 + 1 - x^2 \leq 2$, con lo cual

$$0 \leq \int_r^s (t^2 + 1 - x^2)dx \leq 2(s - r).$$

Combinando estas desigualdades con la expresión anterior para A_t deducimos que

$$2 - 2(s - r) + 0 \leq A_t \leq 2 - 0 + 2(s - r),$$

con lo que concluimos que $A_t \to 2$.

Problema 2.

Para una matriz A de tamaño $n \times n$ y un entero positivo $1 < m < n$, se definen los $m-$*bloques* de A como el conjunto de todas las submatrices $m \times m$ formadas por m filas consecutivas y m columnas consecutivas de A. Se dice que una matriz A es $m-$*simétrica* si todos sus $m-$bloques son matrices simétricas. Dados enteros positivos n y r, se define $C(n, r)$ como el conjunto de matrices $n \times n$ con entradas en $\{1, 2, \ldots, r\}$.

(a) Determine la cantidad de matrices $(n - 1)-$simétricas en $C(n, r)$.

(b) Demuestre que si $1 < m < n$, la cantidad de matrices $m-$simétricas en $C(n, r)$ no depende de m.

Solución. Denotamos por $a(i, j)$ a la entrada i, j de la matriz A, y dado $1 < m < n$, denotamos por $A_m(i, j)$ el $m-$bloques de A tal que su esquina superior izquierda es la entrada $a(i, j)$, con las condiciones de que $1 \leq i, j \leq n + 1 - m$.

(a) Dada una matriz A, una *antidiagonal* de A corresponde a las entradas de A que están alineadas de forma perpendicular a la diagonal principal. En la siguiente matriz se muestran las 7 antidiagonales de una matriz de tamaño 4×4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Se puede ver que una antidiagonal está compuesta por todas las entradas $a(i,j)$ tales que $i+j$ es constante, y que una matriz de $n \times n$ tiene un total de $2n-1$ antidiagonales. Vamos a probar que $A \in C(n,r)$ es una matriz $(n-1)-$simétrica si y solo si las entradas de sus antidiagonales son iguales, es decir, $a(i_1,j_1) = a(i_2,j_2)$ cuando $i_1+j_1 = i_2+j_2$.

Es fácil verificar que esta condición es suficiente (pues en cualquier bloque que se tome, dos entradas que son simétricas cumplen que la suma de sus índices son iguales), por lo que ahora veremos que además es necesaria.

Como la primer entrada de $A_{n-1}(i,j)$ es $a(i,j)$ y $A_{n-1}(i,j)$ es simétrica, entonces:

$$(*) \quad a(i+r, j+s) = a(i+s, j+r), \text{ con } 0 \le r, s \le n-2,$$

puesto que todos los $(n-1)-$bloques que hay son $A_{n-1}(i,j)$ con $1 \le i,j \le 2$.

Para $1 \le k \le n$, vamos a probar que la antidiagonal que contiene a la entrada $a(k,1)$ tiene todas sus entradas constantes, usando $(*)$ con los bloques $A_{n-1}(1,1)$ y $A_{n-1}(1,2)$. Es análogo probar que la antidiagonal que contiene a $a(k,n)$ tiene todas sus entradas iguales, al hacerlo con los bloques $A_{n-1}(2,2)$ y $A_{n-1}(2,1)$.

Al aplicar $(*)$ con los bloques $A_{n-1}(1,1)$ y $A_{n-1}(1,2)$ se tiene lo siguiente:

(i) En el bloque $A_{n-1}(1,1)$, tome $0 \le r \le k-1$ y $s = k-1-r$, entonces se obtiene la igualdad $a(1+r, 1+k-1-r) = a(1+k-1-r, 1+r)$, es decir:

$$a(1+r, k-r) = a(k-r, 1+r).$$

(ii) En el bloque $A_{n-1}(1,2)$, tome $0 \le r \le k-2$ y $s = k-2-r$, entonces se obtiene la igualdad $a(1+r, 2+k-2-r) = a(1+k-2-r, 2+r)$, es decir:

$$a(1+r, k-r) = a(k-1-r, 2+r).$$

Al unir (i) y (ii) obtenemos que:

$$(\star) \quad a(1+r, k-r) = a(k-r, 1+r) = a(k-1-r, 2+r).$$

La expresión $a(k-r, 1+r) = a(k-1-r, 2+r)$ lo que significa es que al moverse 1 hacia arriba (-1 en la primera entrada) y 1 hacia la derecha ($+1$ en la segunda entrada), entonces las entradas de la matriz son iguales, y este movimiento coincide con recorrer antidiagonales.

Por lo tanto, si nos fijamos en la entrada $a(k,1)$ y nos movemos sobre su antidiagonal, entonces obtendremos las siguientes igualdades:

$$a(k,1) = a(k-1,2) = a(k-2,3) = \cdots = a(2,k-1) = a(1,k).$$

Que básicamente consiste en tomar $r = k-2, k-3, \ldots, 2, 1$ en la expresión $(\star)$. De esta forma hemos demostrado que las entradas de cada antidiagonal deben ser constantes, o sea, que $a(i_1, j_1) = a(i_2, j_2)$ siempre que $i_1 + j_1 = i_2 + j_2$.

Por último, sabemos que hay un total de $2n-1$ antidiagonales, y cada una de estas puede tomar cualquier valor en el conjunto $\{1, 2, \dots, r\}$, así que la cantidad total de matrices $(n-1)-$simétricas en $C(n, r)$ es r^{2n-1}.

(*b*) Sea $1 < m < n$. Por la parte (*a*), entonces cada uno de los $(m+1)-$bloques de A son $m-$simétricos, y por lo tanto tienen todas sus antidiagonales constantes.

Usando lo anterior, si $1 \leq i, j < n$, entonces $a(i+1, j)$ y $a(i, j+1)$ esán en un mismo $(m+1)-$bloque de A, y por estar sobre la misma antidiagonal de este $(m+1)-$bloque se cumple que $a(i+1, j) = a(i, j+1)$. En la siguiente matriz se ilustra como $a(i, j+1)$ y $a(i+1, j)$ están en un mismo $(m+1)-$bloque y por lo tanto son iguales:

$$\left(\begin{array}{cc|cccc|cc}
a(1,1) & \cdots & \cdots & a(1,j) & a(1,j+1) & \cdots & \cdots & a(1,n) \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\hline
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
a(i,1) & \cdots & \cdots & a(i,j) & \color{blue}{a(i,j+1)} & \cdots & \cdots & a(i,n) \\
a(i+1,1) & \cdots & \cdots & \color{blue}{a(i+1,j)} & a(i+1,j+1) & \cdots & \cdots & a(i+1,n) \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\hline
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
a(n,1) & \cdots & \cdots & a(n,j) & a(n,j+1) & \cdots & \cdots & a(n,n)
\end{array}\right)$$

De esta forma se concluye que A es $m-$simétrica si y solo si todas las entradas de cada antidiagonal son constantes, lo que coincide con las matrices $(n-1)-$simétricas. Esto implica que la cantidad de matrices $m-$simétricas solo depende de n, r y no de A, pues en total son, nuevamente, r^{2n-1}.

Problema 3. Sea $0 < C < 1$ y $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Demuestre que si $f(x + f(x)) \leq Cf(x)$ para todo $x > 0$, entonces no existe $a > 0$ tal que f sea continua en el intervalo $[a, +\infty)$.

Solución. Sea $a > 0$ y consideremos la sucesión dada por $a_1 = a$ y $a_n = a_{n-1} + f(a_{n-1})$ para $n \geq 2$. La hipótesis $f(x + f(x)) \leq Cf(x)$ implica que $f(a_n) \leq Cf(a_{n-1})$. Con esto obtenemos que $f(a_n) \leq C^{n-1}f(a)$, con lo cual deducimos que $f(a_n) \to 0$.

Como $a_n = a_{n-1} + f(a_{n-1})$ y $f > 0$, entonces la sucesión es creciente. Adicionalmente, iterando la definición obtenemos que

$$a_n = a_{n-1} + f(a_{n-1}) = a_{n-2} + f(a_{n-2}) + f(a_{n-1}) = \ldots = a_1 + f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_{n-2}) + f(a_{n-1}),$$

con lo cual podemos acotar

$$a_n \leq a + f(a) \cdot (1 + C + \ldots + C^{n-3} + C^{n-2}) < a + \frac{f(a)}{1-C}.$$

Como la sucesión es creciente y acotada concluimos que converge a algún número real $a^* > a$. Si f es continua en $[a, +\infty)$, entonces $f(a_n) \to f(a^*)$. Anteriormente habíamos visto que $f(a_n) \to 0$, por lo que deducimos que $f(a^*) = 0$. Esto es una contradicción y así concluye el problema.

Problema 4. Encuentre todos los pares de matrices reales (A, B) de tamaño 2×2, con $A \neq B$, que cumplen que

$$A^2 + B^2 = AB + BA = 2I_2,$$

donde I_2 es la matriz identidad 2×2.

Solución 1. Observamos que las ecuaciones del problema implican las siguientes dos condiciones

$$(A - B)^2 = A^2 + B^2 - (AB + BA) = 0 \;\text{ y }\; (A + B)^2 = A^2 + B^2 + (AB + BA) = 4I.$$

Conversamente, si $(A - B)^2 = 0$ y $(A + B)^2 = 4I$, entonces se cumple que

$$A^2 + B^2 = \frac{1}{2}((A - B)^2 + (A + B)^2) = 2I \;\text{ y }\; AB + BA = \frac{1}{2}((A + B)^2 - (A - B)^2 = 2I.$$

Dado que

$$A = \frac{1}{2}((A + B) + (A - B)) \;\text{ y }\; B = \frac{1}{2}((A + B) - (A - B)),$$

obtenemos que el problema se reduce a caracterizar las matrices que satisfagan $M^2 = 0$ y $N^2 = 4I$. Sabemos que una matriz X de 2×2 es anulada por su polinomio característico y por ende

$$\operatorname{tr}(X)X = X^2 + \det(X)I.$$

Si $M^2 = 0$, entonces $\det M = 0$ y la relación anterior nos da entonces que $\operatorname{tr}(M)M = 0$. Como $M = A - B \neq 0$, entonces deducimos que $\operatorname{tr}(M) = 0$, con lo cual obtenemos que

$$M = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & -2a \end{bmatrix}$$

para reales a, b, c tales que $a^2 + bc = 0$.

Si $N^2 = 4I$, entonces $\det N = \pm 4$ y la relación anterior nos da que $\operatorname{tr}(N)N = (4 \pm 4)I$. Si $\det N = -4$, entonces obtenemos que $\operatorname{tr}(N) = 0$ (pues $N \neq 0$) y así

$$A + B = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2z & -2x \end{bmatrix}$$

para reales x, y, z tales que $x^2 + yz = 1$. Si $\det(N) = 4$, entonces $\operatorname{tr}(N)N = 8I$, con lo cual deducimos que N es un múltiplo de I, y por lo tanto obtenemos que $N = 2I$ o $N = -2I$. Finalmente, usando las expresiones anteriores para A y B en términos de $A + B$ y $A - B$, concluimos que todas las soluciones son de la forma

$$A = \begin{bmatrix} a + x & b + y \\ c + z & -(a + x) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -a + x & -b + y \\ -c + z & a - x \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \pm I, \quad B = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \pm I$$

para reales a, b, c, x, y, z tales que $a^2 + bc = 0$ y $x^2 + yz = 1$.

Solución 2. Al igual que en la solución anterior lo que corresponde es caracterizar las matrices que satisfagan $M^2 = 0$ y $N^2 = 4I$. Para el caso de M, observamos que es una matriz nilpotente distinta de 0, por lo debe ser similar a una matriz de Jordan de tama no 2; es decir, existe una matriz invertible P tal que

$$M = P \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Para el caso de N, vemos que el polinomio $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ tiene factores simples y anula a N, por lo que N debe ser diagonalizable. Dado que las raíces son ± 2, obtenemos que existe una matriz Q invertible tal que se da alguno de los siguientes tres casos:

$$N = Q \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} Q^{-1}, \quad N = Q \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} Q^{-1} = -2I, \quad N = Q \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} Q^{-1} = 2I.$$

Con esto se puede concluir como en la solución anterior.

Problema 5.

Considere un conjunto de números reales $\{a_1 < \cdots < a_n\}$ que satisface que $a_i - a_{i-1} < a_{i+1} - a_i$ para todo $2 \leq i \leq n-1$. Demuestre que para cualquier $d \neq 0$, la cantidad de pares ordenados (a_i, a_j) que satisfacen la igualdad $a_i - a_j = d$ es menor o igual que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Solución. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $d > 0$. Supongamos que la igualdad $a_i - a_j = d$ se satisface para m pares ordenados (i_l, j_l): $d = a_{i_1} - a_{j_1} = \cdots = a_{i_m} - a_{j_m}$. Como $d > 0$ entonces $i_l > j_l$; definimos las diferencias $k_l = i_l - j_l > 0$, de forma que

$$d = a_{j_1+k_1} - a_{j_1} = a_{j_2+k_2} - a_{j_2} = \cdots = a_{j_m+k_m} - a_{j_m}.$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_m$. Vamos a empezar demostrando que $k_1 > k_2 > \cdots > k_m$. Si $k > 0$ es un entero fijo, entonces la condición del problema implica que

$$(a_{j+k} - a_j) - (a_{(j-1)+k} - a_{j-1}) = (a_{j+k} - a_{j+k-1}) - (a_j - a_{j-1}) > 0,$$

con lo cual deducimos que la sucesión $\{a_{j+k} - a_j\}_j$ es estrictamente creciente. Con esto obtenemos que no puede haber dos diferencias iguales, y así $k_1 > k_2 > \ldots > k_m$.

A continuación vamos a demostrar que $j_{l+1} \geq j_l + 2$ para $1 \leq l \leq m-1$. Supongamos por contradicción que $j_{l+1} \leq j_l + 1$ para algún l. Anteriormente demostramos que $k_{l+1} < k_l$, con lo cual $k_{l+1} + 1 \leq k_l$, y así obtenemos que $j_{l+1} + k_{l+1} \leq j_l + k_l$. La igualdad (con d) y el hecho que $\{a_j\}$ es creciente implican que

$$d = a_{j_{l+1}+k_{l+1}} - a_{j_{l+1}} = a_{j_l+k_l} - a_{j_l} \geq a_{j_{l+1}+k_{l+1}} - a_{j_l},$$

con lo que deducimos que $a_{j_{l+1}} \leq a_j$, es decir, $j_{l+1} \leq j_l$. Usando que $\{a_j\}_j$ y $\{a_{j+k_{l+1}} - a_j\}_j$ son sucesiones crecientes concluimos que

$$a_{j_{l+1}+k_{l+1}} - a_{j_{l+1}} \leq a_{j_l+k_{l+1}} - a_{j_l} < a_{j_l+k_l} - a_{j_l},$$

lo cual es una contradicción.

Finalmente, iterando la desigualdad anterior obtenemos que

$$j_m \geq j_{m-1} + 2 \geq \cdots \geq j_1 + 2(m-1) \geq 2m - 1.$$

Como $n \geq j_m + k_m \geq j_m + 1$, obtenemos que $n \geq 2m$ y así concluimos que $m \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Problema 6. Dado un número real $a > 1$, considere la región acotada por las curvas $y = x^a$ e $y = x^{1/a}$, con $x \geq 0$. Determine el radio r de la mayor circunferencia que está completamente dentro de dicha región.

La solución original en la propuesta del problema contiene un error que la Organización de la XXVI OIMU no ha podido enmendar. La Organización asume la responsabilidad del incidente y se disculpa por los inconvenientes causados.

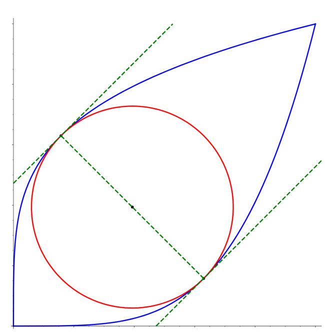
Solución. El Comité de Problemas observó que existe un valor a_0 (aprox. $5,35658$, obtenido con asistencia computacional) de manera que la forma de la mayor circunferencia inscrita depende de los casos $a \leq a_0$ y $a \geq a_0$:

1. Para $a \leq a_0$ se observó (con asistencia computacional) que la mayor circunferencia es tangente a las curvas en los dos puntos (b, b^a) y (b^a, b), donde $b > 0$ es la solución de la ecuación $ab^{a-1} = 1$; las rectas tangentes a las curvas en estos puntos son paralelas al eje de simetría (la recta $y = x$) de la región. En este caso el centro del círculo es

$$\left(\frac{b+b^a}{2}, \frac{b+b^a}{2}\right) = \left(\frac{(a+1)b}{2a}, \frac{(a+1)b}{2a}\right)$$

y el radio es igual a

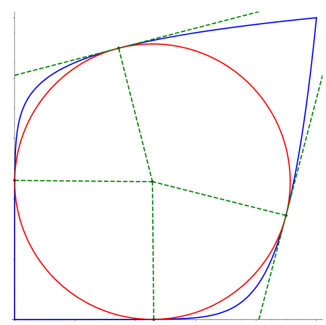
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(b - b^a) = \frac{(a-1)b}{a\sqrt{2}} = \frac{(a-1)a^{-1/(a-1)}}{a\sqrt{2}}.$$



2. Para $a \geq a_0$, se conjetura que la mayor circunferencia es tangente a la curva en cuatro puntos $(b, b^a), (c, c^a), (b^a, b), (c^a, c)$ donde b,c son las únicas soluciones a la ecuación

$$\frac{2b + 2ab^{2a-1}}{1 + ab^{a-1}} = \frac{2c + 2ac^{2a-1}}{1 + ac^{a-1}} = \frac{(b^2 + b^{2a}) - (c^2 + c^{2a})}{(b + b^a) - (c + c^a)}.$$

Si denotamos por λ al valor anterior, entonces estos cuatro puntos cumplen que las distancias al punto $C = (\lambda/2, \lambda/2)$ son iguales (es decir, C es el centro de la circunferencia), y las rectas tangentes a las curvas correspondientes son ortogonales a los vectores de posición respecto a C. No parece sencillo dar una expresión simplificada para el radio en este caso; sin embargo, para a grande el radio debe ser aproximadamente $1/2$, pues la región converge al cuadrado $[0,1] \times [0,1]$.



La principal dificultad del problema es garantizar que la circunferencia propuesta esté contenida dentro de la región. Por ejemplo, para el caso 1, esta condición es equivalente a la desigualdad

$$\left(s - \frac{b+b^a}{2}\right)^2 + \left(s^a - \frac{b+b^a}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{2}(b-b^a)^2 \iff s^{2a} - (b+b^a)s^a + s^2 - s(b+b^a) + 2b^{a+1} \geq 0.$$

Para $a < a_0$ se observa numéricamente (con asistencia computacional) que se cumple la desigualdad anterior y que el único caso de igualdad es $s = b$. Para $a = a_0$ se observa que la desigualdad se sigue cumpliendo, pero existe un nuevo caso de igualdad además de $s = b$. Para $a > a_0$ se observa que la desigualdad ya no se cumple. Para el caso 2, el planteamiento de la desigualdad análoga no parece tener una formulación tan explícita.

Finalmente, el valor de a_0 no parece ser sencillo de calcular de forma exacta. Con base en el comentario del párrafo anterior, si $f(s) = s^{2a} - (b+b^a)s^a + s^2 - s(b+b^a) + 2b^{a+1}$, entonces para el caso $a = a_0$ particular debe existir $c \neq b$ tal que $f(c) = f'(c) = 0$. Mediante el cambio de variables $d = c/b$ y la ecuación $ab^{a-1} = 1$, se pueden reescribir las ecuaciones anteriores como $g(d) = g'(d) = 0$ con $d \neq 1$, donde $g(s) = s^{2a} - (a+1)s^a + a^2s^2 - a(a+1)s + 2a$. Adicionalmente, el valor de a_0 se interpreta geométricamente, como el caso en que dos de los cuatro puntos de tangencia (del caso 2) coincidan con los puntos (b, b^a) y (b^a, b).

Problema 7. Encuentre todas las funciones holomorfas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ y que satisfagan $f(a)f(b)f(c) \in \mathbb{R}$ para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{C}$ que cumplan las condiciones $|a| = |b| = |c| = abc = 1$.

Solución 1. Claramente la función $f \equiv 0$ cumple las condiciones del problema; en adelante, suponemos que $f \not\equiv 0$. Vamos a demostrar que las otras soluciones son los polinomios de la forma $z^m p(z)$, con $m \geq 0$ y $p(z)$ un polinomio recíproco con coeficientes reales; un polinomio recíproco de grado n es un polinomio que satisface $p(z) = z^n p(1/z)$.

Considere la función holomorfa $g(z) := \overline{f(\overline{z})}$. Note que la condición $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ implica que f y g coinciden en $\mathbb{R}$; como estas funciones son holomorfas, lo anterior implica que f y g también deben coincidir en $\mathbb{C}$. Esto nos dice que $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ para todo $z \in \mathbb{C}$. En particular, si α es un cero de f, entonces $\overline{\alpha}$ también. Aún más, como $(z-\alpha)(z-\overline{\alpha})$ toma valores reales en $\mathbb{R}$, usando la condición $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ y la analiticidad de f deducimos que α y $\overline{\alpha}$ tienen la misma multiplicidad.

Sea $\mathbb{T}$ el círculo unitario. La analiticidad de f implica que tiene una cantidad finita de ceros en $\mathbb{T}$. Por la discusión anterior sobre la condición $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, deducimos que los ceros no reales en $\mathbb{T}$ vienen en pares (con su conjugado) con la misma multiplicidad. Nuevamente por la analiticidad podemos escribir

$$f(z) = (z-1)^r (z+1)^s \left(\prod_{k=1}^{N} (z-z_k)(z-\overline{z_k}) \right) F(z),$$

donde $\{z_1, \overline{z_1}, \ldots, z_N, \overline{z_N}\}$ son todos los ceros no reales (contados con multiplicidad) en $\mathbb{T}$ y F es una función holomorfa que no se anula en $\mathbb{T}$.

La relación $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ y las condiciones $a, b, c \in \mathbb{T}$ y $f(a)f(b)f(c) \in \mathbb{R}$ implican que

$$f(a)f(b)f(c) = \overline{f(a)f(b)f(c)} = f(\overline{a})f(\overline{b})f(\overline{b}) = f\left(\frac{1}{a}\right) f\left(\frac{1}{b}\right) f\left(\frac{1}{c}\right).$$

Usando que $|z_k| = 1$, obtenemos que

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{z}\right) &= \left(\frac{1}{z} - 1\right)^r \left(\frac{1}{z} + 1\right)^s \left(\prod_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{z} - z_k\right)\left(\frac{1}{z} - \overline{z_k}\right) \right) F\left(\frac{1}{z}\right) \\ &= \frac{(-1)^r}{z^{r+s+2N}} (z-1)^r (z+1)^s \left(\prod_{k=1}^{N} (z-z_k)(z-\overline{z_k}) \right) F\left(\frac{1}{z}\right). \end{aligned}$$

Sea $\mathcal{Z}$ el conjunto de ceros de f en $\mathbb{T}$. Si $z \in \mathbb{T} \setminus \mathcal{Z}$, entonces

$$\frac{f(z)}{f(1/z)} = (-1)^r z^{r+s+2N} \frac{F(z)}{F(1/z)}.$$

La condición $abc = 1$ y lo anterior implica que si $a, b, 1/ab \in \mathbb{T} \setminus \mathcal{Z}$, entonces

$$F(a)F(b)F\left(\frac{1}{ab}\right) = (-1)^{3r} F\left(\frac{1}{a}\right) F\left(\frac{1}{b}\right) F(ab) = (-1)^r F\left(\frac{1}{a}\right) F\left(\frac{1}{b}\right) F(ab).$$

Como F no se anula en $\mathbb{T}$, tenemos que si $a, b, 1/ab \in \mathbb{T} \setminus \mathcal{Z}$, entonces

$$G(a)G(b) = H(ab),$$

donde $G(z) := F(z)/F(1/z)$ y $H(z) := (-1)^r G(z)$. Las funciones G y H son funciones meromorfas en $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$; además, son holomorfas en todos los puntos de $\mathbb{T}$ porque F no se anula en $\mathbb{T}$. Esto implica que G y H son funciones holomorfas en una región anular $\mathcal{R}$ alrededor de $\mathbb{T}$. Sea $\mathcal{R}^*$ una región anular alrededor de $\mathbb{T}$, contenida en $\mathcal{R}$, de forma que si $a, b \in \mathcal{R}^*$, entonces $ab \in \mathcal{R}$.

El conjunto de puntos $(a,b) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ tales que $a, b, 1/ab \notin \mathcal{Z}$ es denso en $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$, por lo que la continuidad de G y H implican que la igualdad $G(a)G(b) = H(ab)$ vale para cualesquiera $a, b \in \mathbb{T}$. En particular, como $G(1) = 1$, la relación $G(1)G(1) = H(1)$ implica que $(-1)^r = 1$.

Además, para $b \in \mathbb{T}$ fijo, las funciones $a \mapsto G(a)G(b)$ y $a \mapsto H(ab)$ son holomorfas en $\mathcal{R}$ y coinciden en $\mathbb{T}$, por lo que también coinciden para todo $a \in \mathcal{R}$. Para $a \in \mathcal{R}^* \subseteq \mathcal{R}$, las funciones $b \mapsto G(a)G(b)$ y $b \mapsto H(ab)$ son holomorfas en $\mathcal{R}^*$ y coinciden en $\mathbb{T}$, por lo que también coinciden para todo $b \in \mathcal{R}^*$. Hemos demostrado que la relación $G(a)G(b) = H(ab)$ vale para cualesquiera $a, b \in \mathcal{R}^*$.

Como G y H son holomorfas en $\mathcal{R}^*$, entonces admiten una serie de Laurent $G(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} g_n z^n$, $H(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} h_n z^n$, con lo cual la igualdad $G(a)G(b) = H(ab)$ nos da que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k (ab)^k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_m g_n a^m b^n,$$

donde hemos usado la convergencia absoluta de las series para los términos de la suma doble. La unicidad de la serie de Laurent y la relación anterior implica que solo un coeficiente de G no se anula, pues en caso contrario se obtendría un término de la forma $g_m g_n a^m b^n$ que no aparece en la expansión de $H(ab)$. Por lo tanto, $G(z) = g_d z^d$ para algún $d \in \mathbb{Z}$. Como $G(1) = 1$, entonces concluimos que $g_d = 1$.

Por lo tanto, obtenemos que $z^d = G(z) = F(z)/F(1/z)$, o bien $F(z) = z^d F(1/z)$. Si escribimos $F(z) = \sum a_n z^n$, obtenemos que

$$z^d F\left(\frac{1}{z}\right) = a_0 z^d + a_1 z^{d-1} + a_2 z^{d-2} + \dots .$$

Como F es holomorfa, entonces lo anterior implica que $d \geq 0$ y que F debe ser un polinomio de grado menor o igual que d, digamos e. La menor potencia de z en $z^d F(1/z)$ es $m := d - e$, por lo que $F(z) = z^{d-e} J(z) = z^m J(z)$ con J de grado $n := e - m$ y $J(0) \neq 0$. La relación $F(z) = z^d F(1/z)$ es equivalente a $J(z) = z^n J(1/z)$, con lo que deducimos que J es un polinomio recíproco. Por lo tanto, concluimos que

$$f(z) = (z-1)^r (z+1)^s \left(\prod_{k=1}^{N} (z - z_k)(z - \overline{z_k}) \right) z^m J(z) = z^m p(z),$$

donde $p(z) = (z-1)^r (z+1)^s \left(\prod_{k=1}^{N} (z - z_k)(z - \overline{z_k}) \right) J(z)$. Anteriormente demostramos que $(-1)^r = 1$, por lo que $p(z)$ es un producto de polinomios recíprocos con coeficientes reales y por lo tanto también es un polinomio recíproco con coeficientes reales.

Finalmente, notemos que cualquier polinomio p con coeficientes reales satisface que $p(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ y $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$. Por lo tanto, las funciones de la forma $f(z) = z^m p(z)$, con p un polinomio recíproco con coeficientes reales, satisfacen que $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ y si $a, b, c \in \mathbb{C}$ cumplen que $|a| = |b| = |c| = abc = 1$, entonces

$$\overline{f(a)f(b)f(c)} = f(\overline{a})f(\overline{b})f(\overline{c}) = f\left(\frac{1}{a}\right)f\left(\frac{1}{b}\right)f\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{f(a)}{a^n}\cdot\frac{f(b)}{b^n}\cdot\frac{f(c)}{c^n} = \frac{f(a)f(b)f(c)}{(abc)^n} = f(a)f(b)f(c),$$

con lo que concluímos el problema.

Comentario: Si se considera que f esté definida y sea diferenciable solo en $\mathbb{C}^*$, entonces se obtiene que las soluciones son de la forma $z^m p(z)q(z)$, donde p es un polinomio recíproco y q es una función holomorfa en $\mathbb{C}^*$ que satisface $q(1/z) = q(z)$ (es decir, q tiene una serie “recíproca"de Laurent).

Comentario: La deducción de la relación $G(z) = g_d z^d$ puede hacerse por medios alternativos. Por ejemplo, un método analítico podría usar series de Fourier para las funciones G y H en $\mathbb{T}$ y así evitar el argumento con las series de Laurent. Una alternativa algebraica podría usar el hecho que los únicos homomorfismos continuos $\mathbb{T} \to \mathbb{C}^*$ son $z \mapsto z^d$ con $d \in \mathbb{Z}$.