XXV Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria 2022

Problema 1. Considere una esfera S de radio 1 y un icosaedro regular inscrito en S con vértices $V_1, V_2, \ldots, V_{12}$. Sea P un punto cualquiera de S. Determine todos los posibles valores de la suma

$$PV_1^2 + PV_2^2 + \cdots + PV_{12}^2.$$

Nota: Un icosaedro regular es el poliedro regular que tiene 20 caras triangulares, 30 aristas y 12 vértices.

Solución 1. Suponiendo que el centro de la esfera es $O = (0,0,0)$, deducimos que si V es vértice del icosaedro, entonces $-V$ también lo es. Así, la suma de los $\overrightarrow{OV_i}$ es 0. Además, tenemos que

$$PV_i^2 = \langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OV_i}, \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OV_i} \rangle = OP^2 + OV_i^2 - 2\langle \overrightarrow{OV_i}, \overrightarrow{OP} \rangle = 2 - 2\langle \overrightarrow{OV_i}, \overrightarrow{OP} \rangle.$$

Sumando para todo i entre 1 y 12 obtenemos $24 - 2\langle \sum_i \overrightarrow{OV_i}, \overrightarrow{OP} \rangle = 24$, pues $\sum_i \overrightarrow{OV_i} = 0$.

Solución 2. Suponiendo que el centro de la esfera es $O = (0,0,0)$, deducimos que si V es vértice del icosaedro, entonces $W = -V$ también lo es. Esto hace que los cuatro puntos O, P, V, W pertenezcan a un plano Π, de forma que $\angle VPW = \pi/2$ al ser VW un diámetro del círculo $S \cap \Pi$. De esta forma encontramos que $PV^2 + PW^2 = VW^2 = 4$, por el teorema de Pitágoras. Sumando sobre los seis pares de vértices opuestos obtenemos que la suma es igual a 24.

Problema 2. Sean m, n enteros positivos tales que $mn = 2022$. Sea A una matriz $m \times n$ cuyas entradas son los números del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 2022\}$ de modo que cada elemento aparece exactamente una vez. Encuentre el máximo valor que puede tomar el rango de A.

Solución. Sea r el rango de A, luego $r \leq \text{mín}(m,n)$. Como $mn = 2022$, entonces $\text{mín}(m,n) \leq \sqrt{2022} < 45$. Más aún $\text{mín}(m,n)$ es un divisor de 2022, luego $\text{mín}(m,n)$ es a lo sumo igual al máximo divisor de 2022 menor que 45. Como $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$, entonces

$$r \leq \text{mín}(m,n) \leq 6$$

Vamos a mostrar que $r = 6$ es posible, basta hallar una matriz A de 337×6 con 6 filas linealmente independientes. Consideremos $a_{ij} = 6(i-1) + j + b_{ij}$ para $1 \leq i, j \leq 6$ donde $b_{ii} = 40(i-2)$ para $3 \leq i \leq 6$ y $b_{ij} = 0$ caso contrario, y las demás entradas se escogen al azar entre los elementos faltantes. Haciendo operaciones entre filas de las primeras 6 filas se obtiene (primero se resta la primera fila de las demás y luego se resta múltiplos de las segunda fila de las siguientes)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 6 \\ 7 & 8 & 9 & \dots & 12 \\ 13 & 14 & 55 & \dots & 18 \\ \vdots & & & & \\ 31 & 32 & 33 & \dots & 196 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 6 \\ 6 & 6 & 6 & \dots & 6 \\ 12 & 12 & 52 & \dots & 12 \\ \vdots & & & & \\ 30 & 30 & 30 & \dots & 190 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 6 \\ 6 & 6 & 6 & \dots & 6 \\ 0 & 0 & 40 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 160 \end{bmatrix}$$

Las 6 filas de la última matriz son linealmente independientes y por ende tiene rango igual a 6. Como la matriz resultante tiene rango igual a 6, entonces $r = 6$ para la matriz A construida. Se concluye que el máximo valor del rango de A es 6.

Problema 3. Sean p, q reales positivos. Se define $S_{p,q}$ como el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano con $x \geq 0$, $y \geq 0$ tales que $\lfloor x^p \rfloor = \lfloor y^q \rfloor$. Determine las parejas (p, q) para las cuales $S_{p,q}$ tiene área finita.

Solución. Sea $n \geq 0$ un entero. Luego se tiene que

$$\lfloor x^p \rfloor = \lfloor y^q \rfloor = n \iff n \leq x^p, y^q < n+1 \iff n^{\frac{1}{p}} \leq x < (n+1)^{\frac{1}{p}}, \quad n^{\frac{1}{q}} \leq y < (n+1)^{\frac{1}{q}}.$$

Por lo tanto, para n fijo, la región $\lfloor x^p \rfloor = \lfloor y^q \rfloor = n$ forma un rectángulo que tiene área

$$A_n = [(n+1)^{\frac{1}{p}} - n^{\frac{1}{p}}][(n+1)^{\frac{1}{q}} - n^{\frac{1}{q}}].$$

Por el teorema de valor medio existen reales $0 < a_n, b_n < 1$ tales que

$$(n+1)^{\frac{1}{p}} - n^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{p}(n+a_n)^{\frac{1}{p}-1}, \quad (n+1)^{\frac{1}{q}} - n^{\frac{1}{q}} = \frac{1}{q}(n+b_n)^{\frac{1}{q}-1} \implies A_n = \frac{1}{pq}(n+a_n)^{\frac{1}{p}-1}(n+b_n)^{\frac{1}{q}-1}.$$

Dado que para diferentes valores de n estos rectángulos son disjuntos, obtenemos que el área del conjunto $S_{p,q}$ es igual a la serie

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} A_n = \frac{1}{pq} \sum_{n=0}^{\infty} (n+a_n)^{\frac{1}{p}-1}(n+b_n)^{\frac{1}{q}-1}.$$

Si $\alpha = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 2$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha$ converge si y sólo si $\alpha < -1$. Ahora observamos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+a_n)^{\frac{1}{p}-1}(n+b_n)^{\frac{1}{q}-1}}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^{\frac{1}{p}-1} \left(1 + \frac{b_n}{n}\right)^{\frac{1}{q}-1} = 1.$$

Por el teorema de comparación al límite, ambas series convergen o ambas divergen. Luego el área de S es finita si y sólo

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 2 < -1 \iff \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1.$$

Problema 4. Demuestre que existe un conjunto de 25 enteros positivos consecutivos, menores que 10^7, tal que ningún elemento del conjunto es coprimo con todos los demás elementos.

Solución. Sea S el conjunto de los 25 enteros consecutivos. Cualquier divisor primo común a dos elementos de S debe ser menor que 25, es decir, debe pertenecer al conjunto $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$. Si $D_p \subseteq S$ es el conjunto de elementos divisibles por un primo p, entonces es suficiente encontrar que algunos de los conjuntos $\{D_2, D_3, \ldots, D_{23}\}$ tengan cardinalidad al menos 2 y que la cardinalidad de su unión sea 25; de esta forma todo elemento de S pertenece a algún D_p y existe otro elemento en D_p (con el que comparte el divisor p). La condición $|D_p| \geq 2$ es trivial excepto para $p = 13, 17, 19, 23$.

Sea $E_p \subseteq D_p$ el subconjunto de elementos cuyo menor divisor primo es p, es decir, los elementos de D_p que no están en D_q para ningún $q < p$. Podemos representar los números en S por casillas en una cuadrícula 5×5, en donde escribimos p en la casilla correspondiente a n si $n \in E_p$. De esta forma, lo que queremos es tener $|D_p| \geq 2$ para los números p escritos en la cuadrícula. Por ejemplo, si $S = \{6, 7, \ldots, 30\}$, entonces la cuadrícula corresponde a

6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30

$\longrightarrow$

2	7	2	3	2
11	2	13	2	3
2	**17**	2	**19**	2
3	2	**23**	2	5
2	3	2	**29**	2

En este ejemplo, la configuración falla porque $|D_{17}| = |D_{19}| = |D_{23}| = |D_{29}| = 1$ (en general, tenemos que $|D_p| \leq 1$ si $p > 23$).

Observamos que llenar el tablero es equivalente a satisfacer un conjunto de congruencias y queremos construir una solución pequeña, de manera que vamos a evitar considerar el conjunto D_{23}. Hay varias formas (aunque pocas) de llenar el tablero de la forma en que deseamos. Por ejemplo, con

$$|D_2 \cup D_3| = 17, \quad |E_5| = |E_7| = 2, \quad |E_{11}| = |E_{13}| = |E_{17}| = |E_{19}| = 1,$$

algunos ejemplos que se pueden construir son:

2	3	2	7	2
5	2	3	2	11
2	13	2	3	2
5	2	7	2	3
2	17	2	19	2

2	17	2	3	2
7	2	5	2	3
2	11	2	13	2
3	2	5	2	7
2	3	2	19	2

3	2	7	2	5
2	3	2	13	2
11	2	3	2	5
2	7	2	3	2
17	2	19	2	3

Dadas las ubicaciones de 13, 17 y 19 en los ejemplos, podemos observar que en cualquiera de estos tableros se cumple $|D_p| \geq 2$ para $p = 13, 17, 19$ (que son los casos no triviales). Si $S = \{N, N+1, \ldots, N+24\}$, entonces llenar el primer tablero anterior es equivalente a satisfacer el conjunto de divisibilidades

$$2|N, \quad 3|(N+1), \quad 5|(N+5), \quad 7|(N+3), \quad 11|(N+9), \quad 13|(N+11), \quad 17|(N+21), \quad 19|(N+23).$$

Por el teorema chino del residuo, estas congruencias tienen una solución módulo $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 = 9699690 < 10^7$, y así concluye el problema.

Comentario: Los números que corresponden a los tableros de la solución son $N = 5655080$, 1781208, 771321, respectivamente. La última solución es menor que 10^6, pero no es fácil obtener este valor explícito de forma manual.

Comentario: Como $E_p \subseteq D_p \setminus D_2$ para $p > 2$, entonces podemos acotar

$$|D_2| \leq 13, \quad |E_3| \leq 5, \quad |E_5| \leq 3, \quad |E_7|, |E_{11}| \leq 2, \quad |E_{13}|, |E_{17}|, |E_{19}| \leq 1.$$

Inclusive, no es difícil observar que estas estimaciones pueden mejorarse a

$$|D_2 \cup D_3| \leq 17, \quad |E_5| \leq 2 \Longrightarrow |D_2 \cup D_3 \cup D_5| \leq 19.$$

De esta forma obtenemos que

$$|D_2 \cup D_3 \cup D_5 \cup \ldots \cup D_{19}| = |D_2 \cup D_3 \cup D_5| + |E_7| + \cdots + |E_{19}| \leq 19 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 26.$$

La estimación anterior nos dice que solo una de las desigualdades puede ser estricta.

Comentario: En el artículo *On m consecutive integers - III*, ias.ac.in/article/fulltext/seca/013/06/0530-0533, S.S. Pillai demuestra que si $k \geq 17$, entonces existen conjuntos de k enteros consecutivos tales que ninguno de ellos es coprimo con todos los demás.

Problema 5.

Se define una sucesión de números reales $x_0, x_1, x_2, \ldots$ mediante

$$x_{n+1} = \int_0^1 (1 + t^2)^{x_n} \, dt \quad \text{para} \quad n \geq 0.$$

Demuestre que existe L tal que si $x_0 < \frac{7}{2}$, entonces la sucesión converge a L.

Solución. Consideremos las funciones $g(t, x) = (1 + t^2)^x$ y $f(x) = \int_0^1 g(t, x) dt = \int_0^1 (1 + t^2)^x \, dt$, de forma que $x_{n+1} = f(x_n)$ para $n \geq 0$. La función $g(t, x)$ es continua en $[0, 1] \times \mathbb{R}$, y por lo tanto es uniformemente continua en cualquier subconjunto compacto $[0, 1] \times [a, b]$; esto implica que f es continua.

La función $x \mapsto a^x$ es estrictamente creciente y convexa para $a > 1$. Para $t \neq 0$ tenemos que $1 + t^2 > 1$, y entonces la función $x \mapsto g(t, x)$ es estrictamente creciente y convexa. Esto implica que f es estrictamente creciente y convexa.

Como f es estrictamente convexa, cualquier recta la intersecta en a lo sumo dos puntos; en particular, la ecuación $f(x) = x$ tiene a lo sumo dos soluciones. Podemos calcular fácilmente que

$$f(1) = 1 + \frac{1}{3}, \quad f(2) = 2 - \frac{2}{15}, \quad f(3) = 3 - \frac{9}{35}, \quad f(4) = 4 + \frac{68}{315}.$$

Como la función $f(x) - x$ es continua, por el teorema del valor intermedio y el cálculo anterior deducimos que existen reales $B \in (1,2)$ y $C \in (3,4)$ tales que $f(B) = B$ y $f(C) = C$. Más aún, como f es estrictamente creciente (o estrictamente convexa), entonces tenemos que $f(x) > x$ si $x < B$ o $x > C$ y $f(x) < x$ si $B < x < C$. Vamos a demostrar que la sucesión converge a B en cada uno de los casos $x_0 \leq B$ y $B < x_0 < C$.

Supongamos que $x_0 \leq B$. Recordamos que si $x \leq B$, entonces $f(x) > x$. Además, como f es creciente, entonces $f(x) \leq f(B) = B$. Luego, la sucesión $x_0, x_1, \ldots$ es creciente y acotada superiormente por B, y por lo tanto es convergente. Dado que el límite tiene que ser un punto fijo de f, concluimos que la sucesión converge a B.

Ahora supongamos que $B < x_0 < C$. Recordamos que si $B < x < C$, entonces $f(x) < x$. Además, como f es creciente, entonces $f(x) \geq f(B) = B$. Luego, la sucesión $x_0, x_1, \ldots$ es decreciente y acotada inferiormente por B, y por lo tanto es convergente. Dado que el límite tiene que ser un punto fijo de f, concluimos que la sucesión converge a B.

Resta probar que $\frac{7}{2} < C$; como $\frac{7}{2} > 3 > B$, entonces para demostrar esto es suficiente probar que $f(\frac{7}{2}) < \frac{7}{2}$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que $f(\frac{7}{2}) \leq [f(3)f(4)]^{1/2}$, por lo que es suficiente demostrar que $f(3)f(4) < \frac{49}{4}$. Tenemos que $\frac{49}{4} > 12$ y

$$f(3)f(4) = \left(3 - \frac{9}{35}\right)\left(4 + \frac{68}{315}\right) \leq \left(3 - \frac{1}{4}\right)\left(4 + \frac{1}{3}\right) < 12,$$

con lo cual concluye la prueba.

Problema 6.

Problema 6. Sean $m, n \geq 2$ enteros positivos. En un tablero rectangular de $m \times n$ cada casilla tiene un bombillo. Inicialmente hay a lo sumo $m+n-2$ bombillos apagados. En cualquier cuadrado 2×2, se cumple que si tres de los bombillos se encuentran apagados, entonces el cuarto bombillo en dicho cuadrado se apaga. Demuestre que el tablero nunca llega a tener todos sus bombillos apagados.

Solución. Definimos las siguientes variables asociadas a una configuración de un tablero. Sea $A(t)$ el conjunto de casillas con bombillos apagados en el momento t; es claro que $|A(t)|$ es una función no-decreciente. Definimos $P(t)$ como el perímetro total de la figura cubierta por $A(t)$. Sea $L(t)$ el conjunto de rectas del interior del tablero (pueden ser horizontales o verticales) que separan al menos a dos casillas adyacentes en $A(t)$ y definimos $C(t) = |L(t)|$. Finalmente, sea

$$f(t) = P(t) + 2C(t).$$

y con esto estamos listos para proceder con el lema principal.

Lema 1. $f(t)$ es no-creciente y por lo tanto se estabiliza.

Prueba. Si $A(t+1) = A(t) \cup \{X\}$ y v_X es la cantidad de vecinos de X en $A(t)$, tenemos

$$\begin{cases} P(t+1) = P(t) & v_X = 2 \\ P(t+1) = P(t) - 2 & v_X = 3 \\ P(t+1) = P(t) - 4 & v_X = 4. \end{cases}$$

Por otro lado, tomando en cuenta las líneas de cruce agregadas a $L(t)$ al agregar X a $A(t)$, tenemos

$$\begin{cases} C(t+1) = C(t) & v_X = 2 \\ C(t+1) \leq C(t) + 1 & v_X = 3 \\ C(t+1) \leq C(t) + 2 & v_X = 4. \end{cases}$$

Con base en lo anterior, vemos que en los 3 casos, tenemos que

$$f(t+1) = P(t+1) + 2C(t+1) \leq P(t) + 2C(t) = f(t).$$

probando que f es no-creciente mientras $|A(t)|$ crece. Si $A(t)$ se estabiliza, también lo hace $f(t)$.

Ahora procedemos a encontrar una cota superior para f.

Lema 2. $f(0) \leq 4(m+n)$.
Prueba. Como hay a lo más $m+n$ bombillos apagadas inicialmente, la cantidad de lados de estas casillas está acotada por $4(m+n)$. Por cada línea en $L(0)$, se descuentan al menos 2 lados de $P(t)$. De este modo,

$$f(0) = P(0) + 2C(0) \leq (4(m+n) - 2C(0)) + 2C(0) = 4(m+n).$$

Para concluir, observamos que si para algún t tenemos que $|A(t)| = (m+1)(n+1)$ entonces

$$P(t) = 2m + 2n + 4, \quad C(t) = m + n,$$

de donde $f(t) = 4(m+n+1)$, pero

$$4(m+n+1) = f(t) \leq f(0) \leq 4(m+n)$$

lo cual es una contradicción.

Problema 7. En el espacio $\mathbb{R}^3$, decimos que una n-tupla de vectores $v_1, v_2, ..., v_n$ es *genérica* si $1 \leq i < j < k \leq n$ implica $\det(v_i, v_j, v_k) \neq 0$. Dos n-tuplas (v_i) y (w_i) son *similares* si $1 \leq i < j < k \leq n$ implica que $\det(v_i, v_j, v_k)$ y $\det(w_i, w_j, w_k)$ tienen el mismo signo. Consideramos la clases de equivalencia con respecto a esta relación.

Por ejemplo, para $n = 3$ hay dos clases de equivalencia de n-tuplas genéricas, dadas por el signo de $\det(v_1, v_2, v_3)$. Para $n = 4$ hay 16 clases de equivalencia, dadas por los signos de $\det(v_1, v_2, v_3)$, $\det(v_1, v_2, v_4)$, $\det(v_1, v_3, v_4)$ y $\det(v_2, v_3, v_4)$.

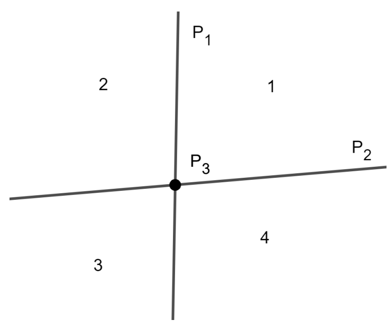
(*a*) ¿Cuántas clases de equivalencia existen para $n = 5$?

(*b*) ¿Cuántas clases de equivalencia existen para $n = 6$?

Solución 1. Sea π_0 el plano generado por los vectores v_1 y v_2, y considere un plano π paralelo a π_0 pero distinto del mismo. Se definen los puntos P_3, P_4, etc. en π como la intersección de las rectas $\{tv_i, t \in \mathbb{R}\}$ con π. Coloreamos los puntos de dos colores para indicar si t es positivo o negativo, así, P_i es de color rojo si el t tal que $tv_i = P_i$ es positivo, y azul en el caso contrario.

Sean S_n el conjunto de las clases de equivalencia cuanco hay n vectores, y C_n su cardinalidad. Vamos a calcular el valor de C_n de manera inductiva. Si $n = 3$, es claro que el signo del determinante $\det(v_1, v_2, v_3)$ está determinado por el color de P_3, y por tanto $C_3 = 2$.

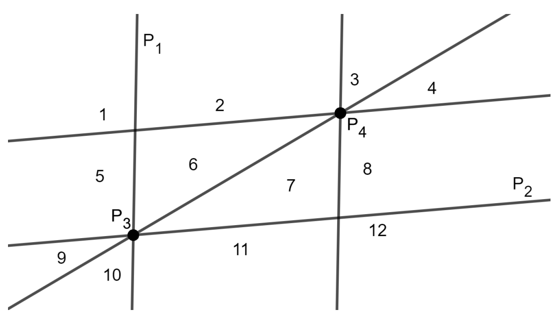
Para $n = 4$, vea que podemos calcular C_4 como la suma sobre S_3 del número de formas distintas de colocar el cuarto vector dado que v_1, v_2, y v_3 ya fueron colocados. Asumimos por tanto que los vectores v_1, v_2, y v_3 ya fueron colocados. Los planos en $\mathbb{R}^3$ generados pasan por v_1 y v_3, y v_2 y v_3, generan dos líneas en π, que lo divide en 4 regiones. Note que cada una de estas regiones define una clase de equivalencia distinta si P_4 está en ellas. Pero además siempre son cuatro sin importar como se coloca v_3.



Por tanto

$$C_4 = C_3 \cdot (\text{Número de regiones}) \cdot (\text{Color de } v_4) = 2 \cdot 4 \cdot 2 = 16.$$

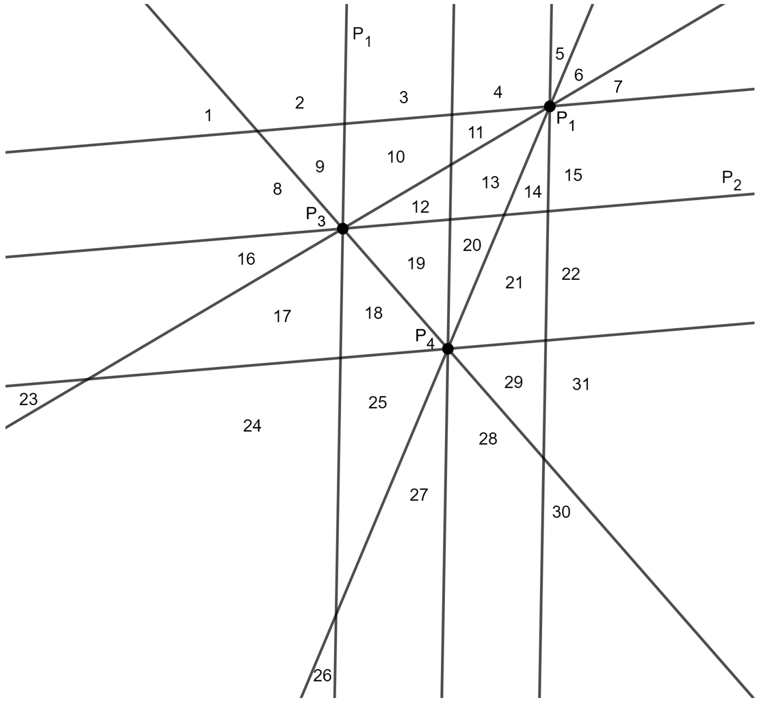
Similarmente, para $n = 5$, vemos que sin importar como se acomoden los primeros 4 vectores, el plano π queda dividido en 12 regiones como se muestra a continuación:



Nuevamente cada una de estas regiones determina dos clases de equivalencia distintas, una por cada color de P_5. Por lo tanto

$$C_5 = C_4 \cdot 12 \cdot 2 = 384.$$

Cuando $n = 6$, es menos evidente que el número de regiones en las que el plano π se parte no depende de la posición de los primeros 5 vectores. Sin embargo este es el caso, el arreglo de los puntos P_3, P_4, y P_5 siempre forma un triángulo, y luego podemos contar regiones como en el siguiente dibujo.

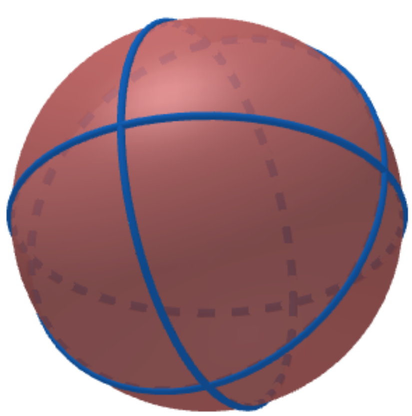


El número de regiones es 31 sin importar como están ubicados los puntos P_3, P_4, P_5. Por lo tanto obtenemos

$$C_6 = C_5 \cdot 31 \cdot 2 = 23808.$$

Solución 2. Al igual que en la solución anterior, vamos contar C_n de forma recursiva. Proyecte los vectores $v_1, \ldots$ sobre la esfera de radio 1, que denotamos por $\mathbb{S}^1$, y considere también todas las intersecciones de los planos $\operatorname{span}\langle v_i, v_j\rangle$ con $\mathbb{S}^1$, estas van a resultar en círculos mayores.

Si $n = 4$, observe que la esfera queda dividida en 8 regiones sin importar cómo estaban acomodados los vectores v_1, v_2, y v_3.



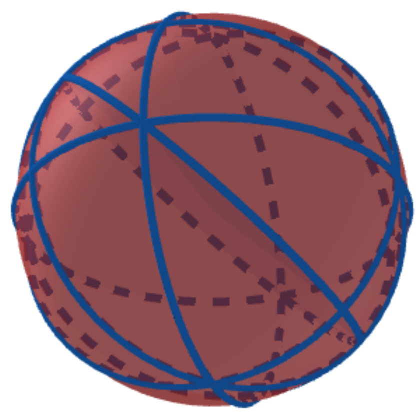
Una forma de ver esto es notar que todas las regiones tienen que ser triangulares, como cada punto de intersección tiene grado 4, si consideramos el arreglo como un grafo, obtenemos

$$\text{número de regiones} = \frac{2}{3}(\text{número de aristas}) = \frac{1}{3}\sum \deg(v) = \frac{4 \cdot 6}{3} = 8.$$

Donde la suma $\sum \deg(v)$ se realiza sobre todos los vértices del grafo. Luego $C_4 = 2 \cdot 8 = 16$. Similarmente, si $n = 5$, vemos que nuevamente todas las regiones que se forman son triangulares, pero a diferencia del caso anterior, no todos los vértices tienen grado 4, de hecho hay exactamente 6 vértices con grado 6, y 6 vértices con grado 4, por lo tanto

$$\text{número de regiones} = \frac{2}{3}(\text{número de aristas} = \frac{1}{3}(6 \cdot 6 + 6 \cdot 4) = 24.$$

Finalmente obtenemos que $C_5 = C_4 \cdot 24 = 384$.



El caso cuando $n = 6$ es más complicado porque ya no todas las regiones que se forman dados 5 vectores son triangulares. Sin embargo, aún es cierto que este número no depende de la posición de los 5 vectores. En efecto, considere el grafo planar como teníamos antes. Es fácil ver que cada círculo mayor pasa por exactamente 10 vértices, y hay exactamente $\binom{5}{2} = 10$ círculos mayores. Por lo tanto hay $10 \cdot 10 = 100$ aristas. Por otro lado, hay el número de vértices de este grafo puede ser contado tomando en cuenta que cada punto pertenece exactamente a dos círculos mayores, excepto por los 10 puntos asociados a los vectores v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5, cada uno de los cuales pertenece a 4 círculos mayores. En total hay 40 vértices. Luego, como la característica de Euler de la esfera es 2, concluimos que

$$\text{número de regiones} = 2 + \text{número de aristas} - \text{número de vértices} = 2 + 100 - 40 = 62,$$

y por lo tanto

$$C_6 = C_5 \cdot 62 = 384 \cdot 62 = 23808.$$

Comentario: Cabe resaltar que si $n = 7$, entonces la cantidad de regiones que se forman dados los primeros 6 vectores sí depende de cómo están colocados estos 6 vectores, y por lo tanto ya no se puede contar C_7 como el producto de C_6 y un factor complementario.