XXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria 2024

Problema 1. (3 puntos) Sean $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ sucesiones de reales positivos. Sean $O=(0,0)$, $A_n=(a_n,0)$ y $B_n=(0,b_n)$ para todo $n\geq 1$. Se construye C_n como la intersección de la recta $y=x$ con el segmento A_nB_n y se definen c_n y d_n como las medidas de los segmentos OC_n y A_nB_n, respectivamente. Suponga que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n}=2024$. Demuestre que la serie $D=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{d_n}$ converge y determine todos los posibles valores de D.

Problema 2. (3 puntos) Sea N un entero positivo y considere el polinomio $P(x)=x\displaystyle\prod_{k=1}^{N}(x^2-k^2)$. Sea A_n el área comprendida entre el gráfico de $|P(x)|$ y el eje x, con $x\in[n-1,n]$. Demuestre que $A_1<A_2<\ldots<A_N$.

Problema 3. (4 puntos) Sea n un entero positivo y sea $\mathbb{R}^{n\times n}$ el espacio de matrices $n\times n$ con entradas reales. Para $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, se define un *alternante* como un producto de una cantidad finita de factores que alternan entre A y B; por ejemplo, A, $ABAB$ y $BABAB$ son *alternantes* de A y B. Determine el mayor valor de n para el que existen $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ tales que sus alternantes generan el espacio $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Problema 4. (5 puntos) Dada una matriz M con entradas reales, sea $\|M\|$ el máximo de los valores absolutos de sus entradas. Demuestre que para todo real $K>1$, existen una matriz $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ y enteros positivos m, n tales que $\|A\|=1$, $\|A^m\|>K$ y $\|A^n\|<1/K$.

Problema 5. (6 puntos) Sea C el conjunto de todos los enteros positivos n tales que si p es un primo que divide a n, entonces p^2 también divide a n; por ejemplo, $\{1,27,72\}\subseteq C$ y $2024\notin C$. Sea $\varphi(n)$ la cantidad de enteros positivos menores o iguales que n que son coprimos con n.

1. Demuestre que la serie $S=\displaystyle\sum_{n\in C}\frac{1}{n}$ converge.
2. Demuestre que para todo $\alpha>0$ la serie $S(\alpha)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}\varphi(n)}$ converge y que $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0^+}\alpha\cdot S(\alpha)=S$.

Problema 6. (7 puntos) Sean $r<s$ enteros positivos. Sean $P(z)=a_rz^r+\cdots+a_0$ y $Q(z)=b_sz^s+\cdots+b_0$, con $a_r,b_s\neq 0$, tales que $|P(z)|\leq|Q(z)|$ para todo $z\in\mathbb{C}$ con $|z|=1$. Suponga que todas las raíces de $Q(z)$ pertenecen al disco $|z|\leq 1$. Demuestre que $\max(|a_0|,|a_r|)\leq|b_s|-|b_0|$.

Problema 7. (7 puntos) Demuestre que la ecuación $x^3+2y^3+3z^3=4$ tiene infinitas soluciones con x,y,z números racionales.

Tiempo: 5 horas