XXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria 2023

Problema 1. (3 puntos) Dado un número real $t > 1$, sea C_t el cuadrado de lado 2 con centro (t, t^2) y lados paralelos a los ejes. Sea A_t el área de la región $C_t \cap \Gamma$, donde $\Gamma = \{(x, y) : y \geq x^2\}$. Calcule el límite de A_t cuando $t \to +\infty$.

Problema 2. (4 puntos) Para una matriz A de tamaño $n \times n$ y un entero positivo $1 < m < n$, se definen los $m-$*bloques* de A como el conjunto de todas las submatrices $m \times m$ formadas por m filas consecutivas y m columnas consecutivas de A. Se dice que una matriz A es $m-$*simétrica* si todos sus $m-$bloques son matrices simétricas. Dados enteros positivos n y r, se define $C(n, r)$ como el conjunto de matrices $n \times n$ con entradas en $\{1, 2, \ldots, r\}$.

(a) Determine la cantidad de matrices $(n-1)-$simétricas en $C(n, r)$.

(b) Demuestre que si $1 < m < n$, la cantidad de matrices $m-$simétricas en $C(n, r)$ no depende de m.

Problema 3. (4 puntos) Sea $0 < C < 1$ y $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Demuestre que si $f(x + f(x)) \leq Cf(x)$ para todo $x > 0$, entonces no existe $a > 0$ tal que f sea continua en el intervalo $[a, +\infty)$.

Problema 4. (5 puntos) Encuentre todos los pares de matrices reales (A, B) de tamaño 2×2, con $A \neq B$, que cumplen que

$$A^2 + B^2 = AB + BA = 2I_2,$$

donde I_2 es la matriz identidad 2×2.

Problema 5. (6 puntos) Considere un conjunto de números reales $\{a_1 < \cdots < a_n\}$ que satisface que $a_i - a_{i-1} < a_{i+1} - a_i$ para todo $2 \leq i \leq n-1$. Demuestre que para cualquier $d \neq 0$, la cantidad de pares ordenados (a_i, a_j) que satisfacen la igualdad $a_i - a_j = d$ es menor o igual que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Problema 6. (7 puntos) Dado un número real $a > 1$, considere la región acotada por las curvas $y = x^a$ e $y = x^{1/a}$, con $x \geq 0$. Determine el radio r de la mayor circunferencia que está completamente dentro de dicha región.

Problema 7. (7 puntos) Encuentre todas las funciones holomorfas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ y que satisfagan $f(a)f(b)f(c) \in \mathbb{R}$ para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{C}$ que cumplan las condiciones $|a| = |b| = |c| = abc = 1$.

Tiempo: 5 horas