XXV Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria 2022

Problema 1. (3 puntos) Considere una esfera S de radio 1 y un icosaedro regular inscrito en S con vértices $V_1, V_2, \ldots, V_{12}$. Sea P un punto cualquiera de S. Determine todos los posibles valores de la suma

$$PV_1^2 + PV_2^2 + \cdots + PV_{12}^2.$$

Nota: Un icosaedro regular es el poliedro regular que tiene 20 caras triangulares, 30 aristas y 12 vértices.

Problema 2. (3 puntos) Sean m, n enteros positivos tales que $mn = 2022$. Sea A una matriz $m \times n$ cuyas entradas son los números del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 2022\}$ de modo que cada elemento aparece exactamente una vez. Encuentre el máximo valor que puede tomar el rango de A.

Problema 3. (4 puntos) Sean p, q reales positivos. Se define $S_{p,q}$ como el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano con $x \geq 0$, $y \geq 0$ tales que $\lfloor x^p \rfloor = \lfloor y^q \rfloor$. Determine las parejas (p, q) para las cuales $S_{p,q}$ tiene área finita.

Problema 4. (5 puntos) Demuestre que existe un conjunto de 25 enteros positivos consecutivos, menores que 10^7, tal que ningún elemento del conjunto es coprimo con todos los demás elementos.

Problema 5. (6 puntos) Se define una sucesión de números reales $x_0, x_1, x_2, \ldots$ mediante

$$x_{n+1} = \int_0^1 (1 + t^2)^{x_n}\, dt \quad \text{para} \quad n \geq 0.$$

Demuestre que existe L tal que si $x_0 < \frac{7}{2}$, entonces la sucesión converge a L.

Problema 6. (7 puntos) Sean $m, n \geq 2$ enteros positivos. En un tablero rectangular de $m \times n$ cada casilla tiene un bombillo. Inicialmente hay a lo sumo $m + n - 2$ bombillos apagados. En cualquier cuadrado 2×2, se cumple que si tres de los bombillos se encuentran apagados, entonces el cuarto bombillo en dicho cuadrado se apaga. Demuestre que el tablero nunca llega a tener todos sus bombillos apagados.

Problema 7. (7 puntos) En el espacio $\mathbb{R}^3$, decimos que una n-tupla de vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ es *genérica* si $1 \leq i < j < k \leq n$ implica $\det(v_i, v_j, v_k) \neq 0$. Dos n-tuplas (v_i) y (w_i) son *similares* si $1 \leq i < j < k \leq n$ implica que $\det(v_i, v_j, v_k)$ y $\det(w_i, w_j, w_k)$ tienen el mismo signo. Consideramos la clases de equivalencia con respecto a esta relación.

Por ejemplo, para $n = 3$ hay dos clases de equivalencia de n-tuplas genéricas, dadas por el signo de $\det(v_1, v_2, v_3)$. Para $n = 4$ hay 16 clases de equivalencia, dadas por los signos de $\det(v_1, v_2, v_3)$, $\det(v_1, v_2, v_4)$, $\det(v_1, v_3, v_4)$ y $\det(v_2, v_3, v_4)$.

(*a*) ¿Cuántas clases de equivalencia existen para $n = 5$?

(*b*) ¿Cuántas clases de equivalencia existen para $n = 6$?

Tiempo: 5 horas