Estabilidad Numérica y Aplicación en la Erosión de Presas de Tierra.
Aula: Estabilidad Numérica de los Métodos en el espacio y tiempo

Giuseppe Romanazzi

Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Brasil

20 Febrero 2024

Contenido

Estabilidad del problema diferencial

Um problema diferencial definido de un operador $\mathcal{A}$ con condiciones de contorno do tipo de Dirichlet en la frontera $\partial\Omega$ y con fuente f

$$\begin{cases} \mathcal{A}u = f \\ u_{|\partial\Omega} = g \end{cases}$$

se dice **estable** si existe:

- una única solución u del problema, y
- que depende en maniera continua respecto a la fuente f o de las condiciones de contorno g.

Entonces un problema es estable si tiene una única solución e para que con pequeñas variaciones dela fuente o del contorno obtenemos pequeñas variaciones dela solución u

Normas de funciones continuas

La distancia entre dos soluciones u, w (o variaciones das soluciones u, $u + \delta u$) medie-se mediante las normas de funciones

$\|u-w\|_{L^\infty} = \max_{x\in\Omega} |u(x)-w(x)|$ (norma infinito o norma del maximo)

$$\|u - w\|_{L^2} = \sqrt{\int_\Omega |u(x) - w(x)|^2 dx} \text{ (norma } L^2\text{)}$$

En el caso de las variaciones se medie $\|\delta u\|_{L^\infty}$ o $\|\delta u\|_{L^2}$

Método numérico

Un método numérico de paso h definido por el $\mathcal{A}_h$ para resolver el problema de la pagina anterior puede ser escrito como

$$\begin{cases} \mathcal{A}_h u_h = f_h \\ u_{h|\partial\Omega} = g_h \end{cases}$$

onde A_h é un operador numérico que aproxima un operador diferencial $\mathcal{A}$.
La solución $u_h = \{u_i\}_{i=1,\ldots,N}$ es formada das aproximaciones u_i de $u(x_i)$ con $x_i = x_0 + ih$ pontos discretos en el espacio.

Estabilidad del método numérico

El método numérico es **estable** si:

- pequeñas variaciones de la fuente f_h o del contorno g_h llevan a pequeñas variaciones de la solución u_h.

La distancia entre dos soluciones u_h, w_h (o variaciones das soluciones) se mide a través de las normas

$\|u_h - w_h\|_{L^\infty} = \max_{i=1,\dots,N} |u_i - w_i|$ (norma infinito o norma del maximo)

$$\|u_h - w_h\|_{L^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} h(u_i - w_i)^2} \text{ (norma } L^2\text{)}$$

Ejemplo de estabilidad respecto a la frontera

Usamos el método numérico aplicado con la misma fuente mas con condición a la frontera g_h y ψ_h diferentes

$$\begin{cases} \mathcal{A}_h u_h = f_h \\ u_{h|\partial\Omega} = g_h \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{A}_h w_h = f_h \\ w_{h|\partial\Omega} = \psi_h \end{cases}$$

El método se dice **estable respecto a la condición en la frontera**:
si existe $c > 0$ independiente de la malla y de las soluciones, tal que

$$\|u_h - w_h\|_{L^\infty} < c\|g_h - \psi_h\|_{L^\infty}$$

Ejemplo de estabilidad respecto a la fuente

Si usamos el método numérico aplicado con la misma condición en la frontera y diferentes f_h, φ_h

$$\begin{cases} \mathcal{A}_h u_h = f_h \\ u_{h|\partial\Omega} = g_h \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{A}_h w_h = \varphi_h \\ w_{h|\partial\Omega} = g_h \end{cases}$$

el método se dice **estable respecto a la fuente**:
si existe $c > 0$ independiente de la malla y de las soluciones tal que

$$\|u_h - w_h\|_{L^\infty} < c\|f_h - \varphi_h\|_{L^\infty}.$$

El mismo vale si usamos la norma en L^2.

Estabilidad en Problema de Valor Inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

es un **problema estable** si

- la solución es única
- y depende en manera continua de la condición inicial.

Es decir : si pequeñas variaciones de la solución inicial llevan a pequeñas variaciones de la solución final.

Condición de Lipschitz para ter unicidad

Definição

La función $f = f(t, y)$ *satisfaz la condición de Lipschitz si existe* $M > 0$ *tal que para cada* y_1, y_2 $|f(t, y_2) - f(t, y_1)| \leq M|y_2 - y_1|$

Proposición

Si f *satisfaz la condición de Lipschitz entonces el problema*
$\begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ *admite una única solución.*

Proposición

Si fuera f *con* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *limitada entonces* f *satisfaz la condición de Lipschitz y entonces el problema de valor inicial tiene una única solución.*

Ejemplos de problemas que satisfacen la condición de Lipschitz

Ejemplo

Los PVI con $f(t,y) = g(t)$; $f(t,y) = \lambda y$; $f(t,y) = tsin(y)$ con $t \in [0, T]$ son problemas con solución única.

Ejemplo

En vez el PVI con $f(y) = e^y$ no tiene solución única si $t \in [0, \infty[$, porque e^y no es limitado, porque la derivad $y' = e^y$ puede crecer indefinidamente y entonces la condicion de Lipschitz no es satisfecha.

Ejemplo de estabilidad

Si f fuera linear respecto a y,
que significa $f(t,y) - f(t,w) = f(t,y-w)$
entonces f satisfaz la condición de Lipschitz.

Y si $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ fuera limitada y $\|y(t)\| \leq c\|y_0\|$
con la constante $c > 0$ independiente del tiempo, entonces el problema es estable.

Demostración

Por la slide anterior tenemos satisfecha la condición de Lipschitz y así tendremos una única solución. Analizamos ahora la continuidad respecto la condición inicial. Si cambiamos la condición inicial, tenemos dos problemas PVI con la misma f

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} w' = f(t, w(t)) \\ w(0) = w_0 \end{cases}$$

observamos que
$(y - w)' = f(t, y(t)) - f(t, w(t)) = f(t, (y - w)(t)),$
$(y - w)(0) = y_0 - w_0$ *entonces pela hipótesis siendo* $y - w$ *una solución del PVI con* f *vale:*
$\|(y - w)(t)\| = \|y(t) - w(t)\| \leq C\|y_0 - w_0\|$
El problema es entonces estable.

Estabilidad absoluta

Dado un problema estable queremos que también el método numérico sea estable en el sentido que la solución depende de manera continua respecto el dado inicial.
Dado el problema PVI

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

el **método** de un paso $\begin{cases} y^{n+1} = \phi_h(y^n, f) \\ y^0 = y_0 \end{cases}$ **es estable** (absolutamente) si

- existir $C > 0$ tal que

$$|y^{n+1}| \leq C|y_0|.$$

Es importante que C sea independiente respecto el paso da malla h, respecto y_0, y respecto n.

Ejemplo de problema PVI estable y inestable (absolutamente)

Si vale que para cada n: $y^{n+1} < ay^n$ entonces

$$y^n < ay^{n-1} < a^2y^{n-2} < \ldots < a^ny_0.$$

Solamente se $a < 1$ el problema PVI será estable.
Porque en este caso para todo n : $a^n < a$ entonces $C = a$.

Si en vez $a > 1$, $a^n > 1$, $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$.
a^n es creciente respecto n y ilimitada: no se puede limitar con un único $C > 0$. El PVI es inestable.

Análisis de estabilidad con Forward Euler (FE)

Suponemos de resolver el problema (de única solución e estable) con $\lambda < 0$

$$\begin{cases} u' = \lambda u \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

usando el método Forward Euler (FE) obtenemos

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta_t} = \lambda u^n$$

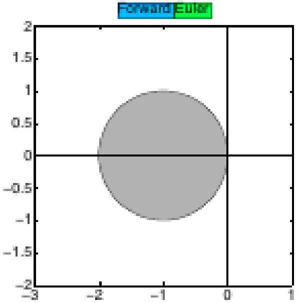
que puede ser escrito en la forma explicita

$$u^{n+1} = u^n + \Delta_t \lambda u^n = (1 + \lambda \Delta_t) u^n$$

Este lleva a $u^n = (1 + \lambda\Delta_t)^n u_0$
Entonces **para ter estabilidad debemos elegir Δ_t tal que** $|1 + \lambda\Delta_t| < 1$ o equivalentemente $-2 < \lambda\Delta_t < 0$ entonces Δ_t tiene que satisfacer $0 < \Delta_t < -\frac{2}{\lambda} = \frac{2}{|\lambda|}$.

Región de Estabilidad de FE

Región de estabilidad por $\lambda\Delta_t$:
es el circulo de centro -1 e radio 1.



$z = \lambda\Delta_t \in \mathbb{C}$ tiene de estar dentro este circulo $(|1+\lambda\Delta_t| < 1)$ para ter estabilidad de FE.

Δ_t tiene de ser limitado $(0 < \Delta_t < \frac{2}{|\lambda|})$ para ter estabilidad!
Precisamos muchos pasos para aproximar la solución en un tiempo grande T.

Estabilidad en el caso de Backward Euler

Método Backward Euler

$$\frac{U^n - U^{n-1}}{\Delta_t} = \lambda u^n$$

o equivalentemente

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta_t} = \lambda U^{n+1}$$

De este obtenemos

$$(1 - \Delta_t \lambda) U^{n+1} = U^n$$

Este lleva a

$$U^{n+1} = \frac{1}{1 - \Delta_t \lambda} U^n$$

$$BE : U^{n+1} = \frac{1}{1 - \Delta_t \lambda} U^n$$

La condición de estabilidad es $|\frac{1}{1-\Delta_t \lambda}| < 1$ Siendo $\lambda < 0$ tendremos $1 - \Delta_t \lambda > 1$ y por lo tanto por cualquier paso de tiempo $\Delta_t > 0$ la condición es verificada. El método es siempre estable.

Estabilidad para problemas diferenciales da ecuación de adveccion

En el caso de analizar la estabilidad del problema $u_t + au_x = 0$
Usando FTCS

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta_t} + a\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{\Delta_t}$$

Resulta difícil llegar a la relación con el factor de amplificación C tal que por cada j

$$U_j^{n+1} = CU_j^n = \ldots = C^n U_j^0$$

Se puede usar una otra análisis chamada análisis de Von Neumann que es basada en la expansión de Fourier.

Expansión en Series de Fourier y estabilidad del problema PVI

Una función se puede representar por base de series de Fourier

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\xi,t) e^{i\xi x} d\xi \tag{1}$$

onde $\hat{u}(\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(x,t) e^{-i\xi x} dx$. Siendo que vale la desigualdad de Parseval

$$\|u\|_{L^2} = \|\hat{u}\|_{L^2}.$$

Analizar el crecimiento de u es el mismo que analizar el crecimiento de $\hat{u}$.

El beneficio de usar la expansión (1) es que la ecuación puede ser trasformada en una donde ten solamente los coeficientes de Fourier. Usaremos por ter eso:

$$u_x(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi \hat{u}(\xi,t) e^{i\xi x} d\xi$$

$$u_t(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_t(\xi,t) e^{i\xi x} d\xi$$

y tenemos pela igualdad $u_t + au_x = 0$ una relación (ODE) solamente con los termos $\hat{u}(\xi,t)$:

$$\hat{u}_t(\xi,t) + ia\xi \hat{u}(\xi,t) = 0 \tag{2}$$

La expansión en Serie de Fourier permite entonces de linearizar las derivadas u_x, su estudio de estabilidad será mas simples, podemos analizar el crecimiento en el tiempo para cada termo ξ separadamente.

Analizaremos solamente el crecimiento de $\hat{u}(\xi, t)$ (que satisface a ecuación (2)) para verificar la estabilidad de la solución $u(x, t)$.

Expansión en Series de Fourier y estabilidad del método numérico

La solución numérica U_j^n de un método (que aproxima $u(x_j, t^n)$) de paso h en el espacio, se puede representar en base de Fourier discreta

$$U_j^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{+\frac{\pi}{h}} \hat{U}^n(\xi) e^{i\xi x_j} d\xi \tag{3}$$

onde $\hat{U}^n(\xi) = \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} U_j^n e^{-i\xi x_j} dx.$

Vale también aquí la desigualdad de Parseval $\|U^n\|_{L^2} = \|\hat{U}^n\|_{L^2}.$

Como antes, el beneficio de usar la expansión (3) es que cualquier discretización en el espacio se podrá linearizar usando esta expansión, ejemplo con la formula centrada centrado:

$$\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{U}^n(\xi) \frac{e^{i\xi(x_j+h)} - e^{i\xi(x_j-h)}}{2h} d\xi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{U}^n(\xi) \sin(h\xi) d\xi$$

permite de analizar mas fácilmente la estabilidad del método.

Sea $g(\xi)$ el factor de amplificación de $\hat{U}(\xi)$,
que es tal por definición

$$\hat{U}^{n+1}(\xi) = g(\xi)\hat{U}^n(\xi).$$

Se probamos que $|g(\xi)| < 1$ sendo que $\hat{U}^n(\xi) = (g(\xi))^n \hat{U}^0(\xi)$ tendremos

$$\|\hat{U}^n(\xi)\|_2 \leq |g(\xi)|^n \|\hat{U}^0(\xi)\|_2 < \|\hat{U}^0(\xi)\|_2$$

y así

$$\|\hat{U}^n(\xi)\|_2 < \|\hat{U}^0(\xi)\|_2$$

que lleva a ter estabilidad nos coeficientes da expansión. Ahora siendo $\|U^n\|_2 = \|\hat{U}^n\|_2$ tenemos estabilidad también del método numérico:

$$\|U^n\|_2 < \|U^0\|_2$$

Vamos ver como esta análisis si puede aplicar en el caso de un problema y método especifico usando la expansión en serie de Fourier.

Ejemplo de análisis de estabilidad de FTCS aplicado a $u_t + au_x = 0$

FTCS:

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta_t} + a\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} = 0$$

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta_t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{U}^{n+1}(\xi) - \hat{U}^n(\xi)}{\Delta_t} e^{i\xi x_j} d\xi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\xi) - 1}{\Delta_t} \hat{U}^n(\xi) e^{i\xi x_j} d\xi$$

$$\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{U}^n(\xi) \frac{e^{i\xi(x_j+h)} - e^{i\xi(x_j-h)}}{2h} d\xi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{U}^n(\xi) \sin(h\xi) d\xi$$

El método FTCS puede ser escrito entonces como

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}[\frac{g(\xi)-1}{\Delta_t}+a\frac{i}{h}\sin(h\xi)]\hat{U}^n(\xi)d\xi=0$$

Y por la unicidad de expansión de Fourier tedremos

$$\frac{g(\xi)-1}{\Delta_t}+a\frac{i}{h}\sin(h\xi)=0$$

Así deducimos

$$g(\xi)=1-ia\frac{\Delta_t}{h}\sin(\xi h)$$

que tiene tiene el modulo mayor de uno $|g(\xi)|>1$ llevando a ter $\|\hat{U}^n\|_2>\|\hat{U}^0\|_2$ el método es así inestable.
Porque tendremos por la igualdad de Parseval
$\|U^n\|_2=\|\hat{U}^n\|_2>\|\hat{U}^0\|_2=\|U^0\|_2$

Análisis de Von Neumann

Es una análisis rápida que permite determinar directamente $g(\xi)$ por un dado método. Ejemplo con FTCS:

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta_t} + a\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} = 0$$

se substituimos U_j^n por $g(\xi)^n e^{i\xi x_j}$ podemos obtener el mismo factor $g(\xi)$ (obtido antes usando la expansión de Fourier)

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta_t} = \frac{g(\xi) - 1}{\Delta_t} g(\xi)^n e^{i\xi x_j}$$

$$a\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} = a\frac{e^{i\xi h} - e^{-i\xi h}}{2h} g(\xi)^n e^{i\xi x_j} = ia\frac{sin(\xi h)}{h} g(\xi)^n e^{i\xi x_j}$$

Dividendo para $g(\xi)^n e^{i\xi x_j}$

$$\frac{g(\xi) - 1}{\Delta_t} + ia\frac{sin(\xi h)}{h} = 0$$

Análisis de Von Neumann por el método de Upwind aplicado a $u_t + au_x = 0$

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta_t} + a\frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{h} = 0, \text{si } a > 0$$

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta_t} + a\frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{h} = 0, \text{si } a < 0$$

Vemos el caso $a > 0$

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta_t} = \frac{g(\xi) - 1}{\Delta_t} g(\xi)^n e^{i\xi x_j}$$

$$a\frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{h} = a\frac{1 - e^{-i\xi h}}{h} g(\xi)^n e^{ix_j}$$

Entonces aplicando el método : $\dfrac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta_t} + a\dfrac{U_j^n - U_{j-1}^n}{h} = 0$

obtenemos ...

$\frac{g(\xi)-1}{\Delta_t} + a\dfrac{1-e^{-i\xi h}}{h} = 0$ Ou seja

$$g(\xi) = 1 - a\Delta_t\frac{1-e^{-i\xi h}}{h} = 1 - \nu(1-e^{-i\xi h}) = 1 - \nu + \nu e^{-i\nu h}$$

donde $\nu = a\frac{\Delta_t}{h}$.
$g(\xi)$ (como valor complexo) está entonces en el circulo de centro $(1-\nu, 0)$ y radio ν.

Así para ter la condición de estabilidad $|g(\xi)| < 1$ necesariamente tendremos $\nu < 1$.
Porque si fuera $\nu \geq 1$ entonces o ponto mas a izquierda en el eje real será $1-\nu-\nu = 1-2\nu \leq 1-2 = -1$ $g(\xi)$ no es contenido en el intervalo $]-1, 1[$: tendremos inestabilidad.

Análisis de estabilidad de Lax aplicada a $u_t + au_x = 0$

$$\frac{U_j^{n+1} - \frac{U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{2}}{\Delta_t} + a\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} = 0$$

$$g(\xi) - \frac{e^{i\xi h} + e^{-i\xi h}}{2} + a\Delta_t \frac{e^{i\xi h} - e^{-i\xi h}}{2} = 0$$

$g(\xi) = \cos(\xi h) - i\nu \sin(\xi h)$ con $\nu = a\frac{\Delta_t}{h}$ donde usamos que

$$\frac{e^{ih\xi} + e^{-ih\xi}}{2} = \cos(h\xi); \quad \frac{e^{ih\xi} - e^{-ih\xi}}{2} = i\sin(h\xi)$$

Observamos que

$$|g(\xi)| < 1 \iff \cos^2(\xi h) + \nu^2 \sin^2(\xi h) < 1 \iff \nu < 1$$

Tendremos estabilidad si nuevamente vale la condición

$$a\frac{\Delta_t}{h} < 1$$