Estabilidad Numérica y Aplicación en la Erosión de Presas de Tierra.
Aula: Presentación del Curso, Problema y Métodos

Giuseppe Romanazzi

Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Brasil

20 Febrero 2024

EMALCA
Escuela de Matemática para Latinoamérica y el Caribe
Guanacaste, Costa Rica · Del 12 al 23 de febrero, 2024

UNICAMP

Contenido

Presentación

Cinco aulas en tres días

Martes	08:00-10:00 ; 10:30-11:30
Miércoles	10:30-12:30
Jueves	14:00-15:30 ; 16:00-17:00

Tópicos

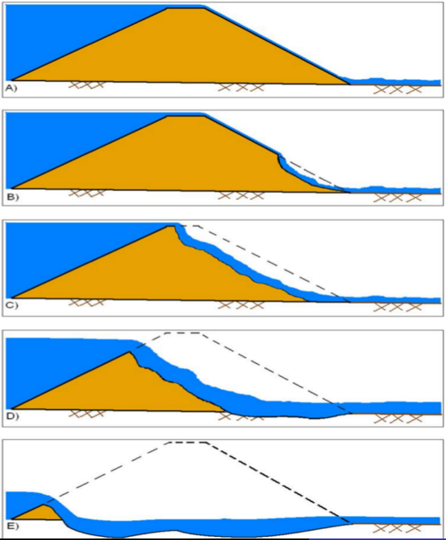
- Métodos Numéricos para Problemas Diferenciales en el espacio y tiempo (Aula 1)
- Estabilidad Numérica de los Métodos en el espacio y tiempo (Aula 2)
- Presas de Tierra (Aula 3)
- Modelo do Rompimiento de Presas e ecuaciones (Aula 3)
- Métodos numéricos y estabilidad (Aula 4 y Aula 5)

Problemas Diferenciales en el espacio y tiempo, EDP

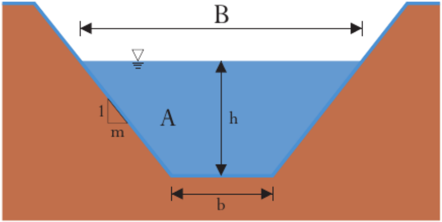
- Son descritos mediante de una o mas ecuaciones diferenciales parciales (EDP)
- La solución del problema diferencial es una función incógnita $u = u(x, t)$ que descree el problema físico de interese
  - x variable en el espacio real $\mathbb{R}$, o en un dominio cerrado $[a, b]$. No trataremos dominios espaciales bidimensionales en los métodos.
  - $t >= 0$ variable en el tiempo.
- $u(x, t)$ puede ser la velocidad del flujo de agua en un canal, la concentración de sedimento en el canal de la brecha (ruptura), la dimensión de la largura o altura de la brecha de rompimiento en la presa, ...

Desbordamiento con variación en el tiempo e espacio de las características geométricas de la brecha

Desbordamiento con variación en el tiempo e espacio de las características geométricas de la brecha



Desbordamiento con variación en el tiempo e espacio de las características geométricas de la brecha



Ecuaciones diferenciales parciales (EDP)

- Ecuaciones diferenciales parciales (EDP) tienen derivadas parciales relativa a mas de que una variable independiente, en nuestros casos x variable espacial y t variable temporal.
- derivadas parciales relativamente a variables independientes son designadas a través de subscritos, como por ejemplo
  - $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$
  - $u_{xy} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

Ejemplo

Ecuación de Advección

$$u_t + (au)_x = 0$$

descree o trasporte da cantidad u dentro de un fluido con velocidad a.
No caso que a velocidad fuera constante, o si el fluido fuera incompresible ($a_x = 0$)

$$u_t + au_x = 0$$

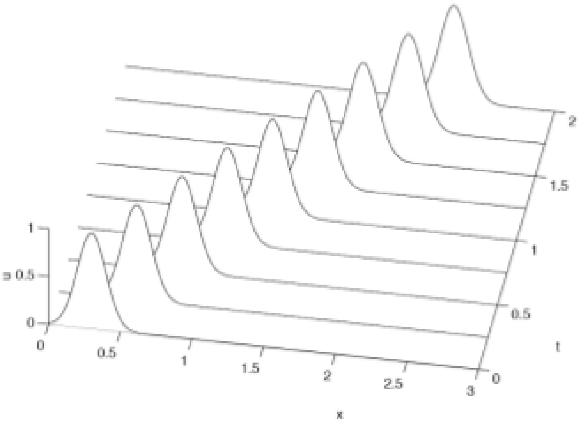
- La solución única es determinada por la condición inicial

  $$u(x, 0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}$$

  en que u_0 es la solución inicial definida en $\mathbb{R}$.
- La solución es dada por $u(x, t) = u_0(x - at)$ para $t \geq 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}$. La solución es la función inicial u_0 traslada de at para la derecha si $a > 0$, o para la izquierda si $a < 0$.

Caso con velocidad positiva $a > 0$

$$u(x,t) = u_0(x - at)$$



Ecuaciones de segunda orden

Ecuación del calor: $u_t = u_{xx} + f$
Ecuación de onda: $u_{tt} = u_{xx} + f$
Ecuación de Laplace: $u_{xx} = 0$
Ecuación de Poisson: $-u_{xx} = f$, con $f = f(x)$.

Clasificación de EDP en x, t de segunda orden

EDPs de segunda orden tienen la siguiente forma

$$au_{tt} + bu_{tx} + cu_{xx} + du_t + eu_x + fu + g = 0$$

y son clasificadas en función del discriminante $b^2 - 4ac$:
$b^2 - 4ac > 0$: hiperbólicas (ej. ecuación de la onda)
$b^2 - 4ac = 0$: parabólicas (ej. ecuación del calor)
$b^2 - 4ac < 0$: elípticas (ej. ecuación de Laplace, ecuación de Poisson)

Ecuación de conservación de masa

En este curso usaremos la ecuación de conservación de masa (de sedimento) en el canal de rompimiento

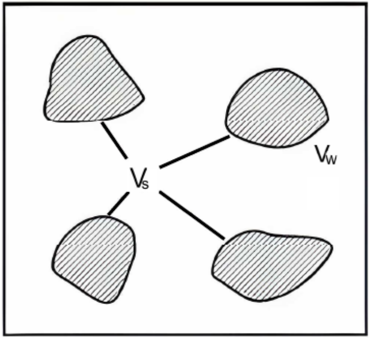
$$\frac{\partial AC}{\partial t} + \frac{\partial QC}{\partial x} = qi$$

y la solución procurada es $C = C(x, t)$ donde

- $C = C(x, t)$ concentración del sedimento (sin dimensión)
- $A = A(x, t)$ área transversal do flujo en el canal medida en m^2
- $Q = Q(x, t)$ tasa de flujo volumétrico de descarga (caudal) en m^3/s
- $qi = qi(x, t)$ fuente de concentración por unidad de tiempo que ven del sedimento removido de la presa del flujo de agua

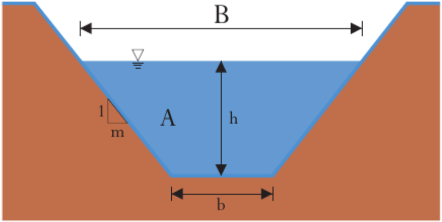
Concentración del sedimento

$$C(x, t) = \frac{V_s}{V_w + V_s}$$



donde V_s es el volumen del sedimento,
V_w es el volumen de la agua en el ponto x, tiempo t

Área transversal del canal de ruptura



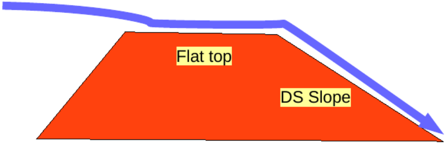
$A = A(x, t)$ es la área mojada del canal correspondiente a la posición x en el canal da brecha (rompimiento,ruptura) en el tiempo t.

$$A = h(b + B)/2 = h(b + (b + 2hm))/2 = h(b + hm)$$

Caudal

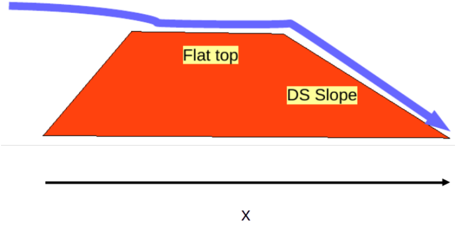
$Q = Q(x,t)$ es el caudal en el ponto x, tiempo t

Q representa el volumen de sedimento trasportado del flujo (de agua) en el canal durante la unidad de tiempo (1 segundo s).



Analizaremos solamente el flujo en el "flat top"(cresta de la presa)

Cada ponto x individua una área trasversal $A(x, t)$ del canal no ponto x del canal con concentración $C(x, t)$ y caudal $Q(x, t)$ que es supuesto distribuir uniformemente (o si hace una media uniformemente distribuida) con una única concentración C e caudal Q.



Nuestro Problema

Trataremos un canal con flujo y área constante en el sentido que suponíamos que la área y o caudal en el canal es siempre el mismo para cada x y no intervalo $[t_n, t_n + \Delta_t[$:

$$A(x,t) = const = A \quad \forall t \in [t_n, t_n + \Delta_t[, x \in [0, l_{channel}]$$
$$Q(x,t) = const = Q \quad \forall t \in [t_n, t_n + \Delta_t[, x \in [0, l_{channel}]$$

.

Entonces en el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta_t[$ habremos:

$$\frac{\partial AC}{\partial t} + \frac{\partial QC}{\partial x} = qi \Longrightarrow A\frac{\partial C}{\partial t} + Q\frac{\partial C}{\partial x} = qi$$

Discretización

Sea $I = [a, b]$ un intervalo continuo , (algo similar vale en espacios continuos bidimensionales o tridimensionales). Definimos discretización completa (o malla) del intervalo I el conjunto de pontos distintos $X = \{x_i\}_{i=0,\dots,N} \subset I$ tal que

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$$

- la discretización es uniforme si o espaciamiento entre los pontos $h = x_i - x_{i-1}$ fuera constante
- la discretización es no uniforme se existir $i \neq j$ tal que $h_i := x_i - x_{i-1}$ es diferente de $h_j = x_j - x_{j-1}$, o análogamente se $h_i \neq h_j$ para algún par (i, j).

Aproximamos las derivadas en algún ponto en la malla uniforme

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función derivable (con derivadas finitas) es posible aproximar a menos de un erro (previsible) a derivadas de f nos pontos de una dada discretización de $[a, b]$.
Usaremos solamente los pontos da discretización, e las diferencias de la función f computadas en estés pontos.

Formulas de diferencias finitas para aproximar $f'(x)$ en mallas uniformes

$$D_{-x} f(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} \text{(Backward Euler, Formula atrasada)}$$

$$D_{+x} f(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} \text{(Forward Euler, Formula avançada)}$$

$$D_c f(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} \text{ (Centered Formula, Formula centrada)}$$

Las formulas centradas en mallas uniformes son las mas precisas a paridad de los numero de avaliaciones da f.

Erro de truncamiento

El erro de truncamiento de una formula de diferencias finitas es

$$\tau = D_? f(x_i) - f'(x_i)$$

o erro entre la aproximación obtenida de la formula $D_? f(x_i)$ y el valor exacto dela derivada.
Chama se de truncamiento porque deriva del truncamiento da expansión en serie de Taylor da función f.

Usando la expansión de $f(x_{i-1})$ respecto $f(x_i)$ encontramos el erro de truncamiento de $D_{-x}f(x_i)$.

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(x_i) - \frac{h^3}{6}f'''(x_i) + O(h^4)$$

Obtenemos

$$\tau_{D_{-x}} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} - f'(x_i) = -\frac{h}{2}f''(x_i) + \frac{h^2}{6}f'''(x_i) + O(h^3)$$

Note que

$$\tau_{D_{-x}} = O(h)$$

Portanto dice-se que la formula atrasada es una formula de primera orden.

Usando la expansión de $f(x_{i-1})$ respecto $f(x_i)$ e de $f(x_{i+1})$ respecto $f(x_i)$ encontrar el erro de truncamiento de $D_c f(x_i)$.

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2} f''(x_i) - \frac{h^3}{6} f'''(x_i) + O(h^4)$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2} f''(x_i) + \frac{h^3}{6} f'''(x_i) + O(h^4)$$

Obtenemos substraendo las dos expansiones e dividendo por h

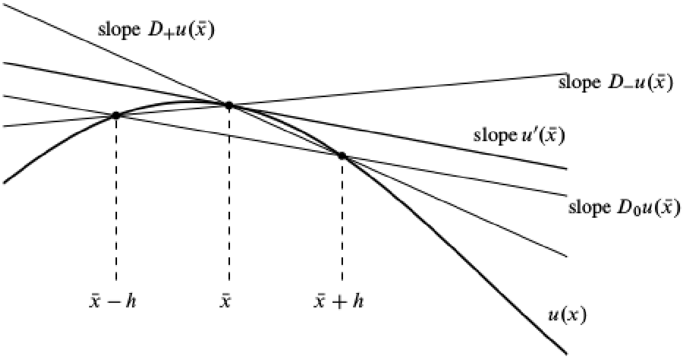
$$\tau_{D_c} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{h} - f'(x_i) = \frac{h^2}{6} f''(x_i) + O(h^4)$$

Note que

$$\tau_{D_c} = O(h^2)$$

Así que dice-se que la formula atrasada es de segunda orden. Para h pequeño (o cuando $h \to 0$) aproxima mejor la derivada de f en x_i

From Leveque book Randall J. LeVeque, Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations - Steady State and Time Dependent Problems, SIAM Press, 2007"



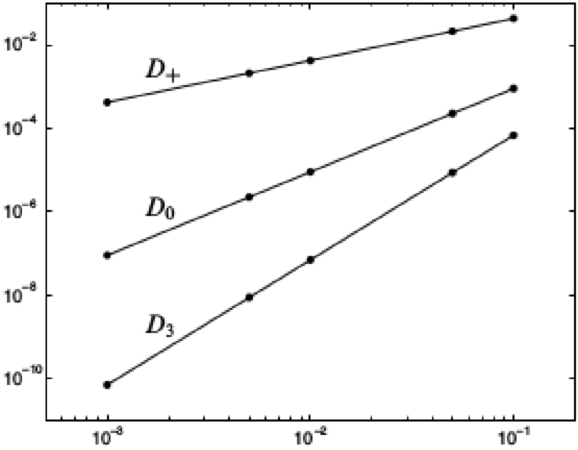
Analisis del erro

h	$D_+u(\bar{x})$	$D_-u(\bar{x})$	$D_0u(\bar{x})$	$D_3u(\bar{x})$
1.0e−01	−4.2939e−02	4.1138e−02	−9.0005e−04	6.8207e−05
5.0e−02	−2.1257e−02	2.0807e−02	−2.2510e−04	8.6491e−06
1.0e−02	−4.2163e−03	4.1983e−03	−9.0050e−06	6.9941e−08
5.0e−03	−2.1059e−03	2.1014e−03	−2.2513e−06	8.7540e−09
1.0e−03	−4.2083e−04	4.2065e−04	−9.0050e−08	6.9979e−11

We see that

$$D_+u(\bar{x}) - u'(\bar{x}) \approx -0.42h,$$
$$D_0u(\bar{x}) - u'(\bar{x}) \approx -0.09h^2,$$
$$D_3u(\bar{x}) - u'(\bar{x}) \approx 0.007h^3,$$

$$E \approx Ch^p$$


10^{-2}
10^{-4}
10^{-6}
10^{-8}
10^{-10}
D_+
D_0
D_3
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}

Metodos numéricos para la ecuación de advección $u_t + au_x = q(u)$

$u_t + au_x = q(u)$

- Upwind (FTFS) (FTBS)
- FTCS
- Lax method

Determinamos u_i^n aproximación de $u(x_i, t^n)$

FTFS aplicado a $u_t + au_x = q(u)$

Foward in Time, Forward in Space (FTFS)

$$u_t + au_x = q(u)$$

Usa Forward (Adelante) en el tiempo y en el espacio

$$u_t(x_i, t^n) \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta_t}$$

$$u_x(x_i, t^n) \approx \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta_x}$$

Entonces el método de diferencia finita es

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta_t} + a\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta_x} = q(u_i^n)$$

FTBS aplicado a $u_t + au_x = q(u)$

Usa Forward en el tiempo and Backward (Atrasamento) en el espacio espacio aplicado a

$$u_t + au_x = q(u)$$

con

$$u_t(x_i, t^n) \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta_t}$$

$$u_x(x_i, t^n) \approx \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta_x}$$

Entonces el método de diferencias finitas es

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta_t} + a\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta_x} = q(u_i^n)$$

Upwind aplicado a $u_t + au_x = q(u)$

El método upwind es a favor del viento:

- usa la discretización backward en el espacio si a fue positiva
- forward en el espacio si a fue negativa

$$UPWIND = \begin{cases} FTBS & \text{si } a > 0 \\ FTFS & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

El método upwind usa la información en el espacio que puede ser trasportada da velocidad no ponto x_i e así si $a > 0$ (información viaja de izquierda a derecha) usa el valor de u_{i-1}^n para determinar el valor de u_i^n mediante el Backward en el espacio.
Viceversa si $a < 0$ la información da onda viaja de derecha a la izquierda entonces usa el valor de u_{i+1}^n para determinar el valor de u_i^n mediante el Forward en el espacio.

FTCS aplicado a $u_t + au_x = q(u)$

Este método usa forward en el tiempo e o método centrado en el espacio

$$u_t(x_i, t^n) \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta_t}$$

$$u_x(x_i, t^n) \approx \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta_x}$$

El método es escrito como sigue

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta_t} + a\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta_x} = q(u_i^n)$$

Método de Lax

El Método de Lax (Lax-Friedrichs) usa la formula centrada en el espacio:

$$u_x(x_i, t^n) \approx \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{\Delta_x}$$

y en el tiempo usa $u_t(x_i, t^n) \approx \frac{u_i^{n+1} - \tilde{u}_i^n}{\Delta_t}$ con $\tilde{u}_i^n = \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2}$
El método es escrito como sigue

$$\frac{u_i^{n+1} - \tilde{u}_i^n}{\Delta_t} + a\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta_x} = q(u_i^n)$$

El termo de fuente $qi(u(xi, t^n))$ es aproximado en estés métodos por $qi(u_i^n)$.

Problema

Sabiendo que la concentración inicial en un canal de rompimiento es nula.
Y que la velocidad de agua que pasa en el canal es siempre $u = Q/A = 2m/s$, *y que* $q_i(C) = 0{,}1 * C + 0{,}1$ *(tasa de sedimento heroida dela represa). Queremos determinar cual es la concentración de sedimento después de 1 hora en el fin de un canal que mide 5 metros, sabiendo que en el inicio del canal la agua es limpia (no tiene sedimento).*
Use los siguientes métodos: Upwind, FTCS, Lax.
Use un paso de tiempo y de espacio pequeño para una ter buena aproximación.