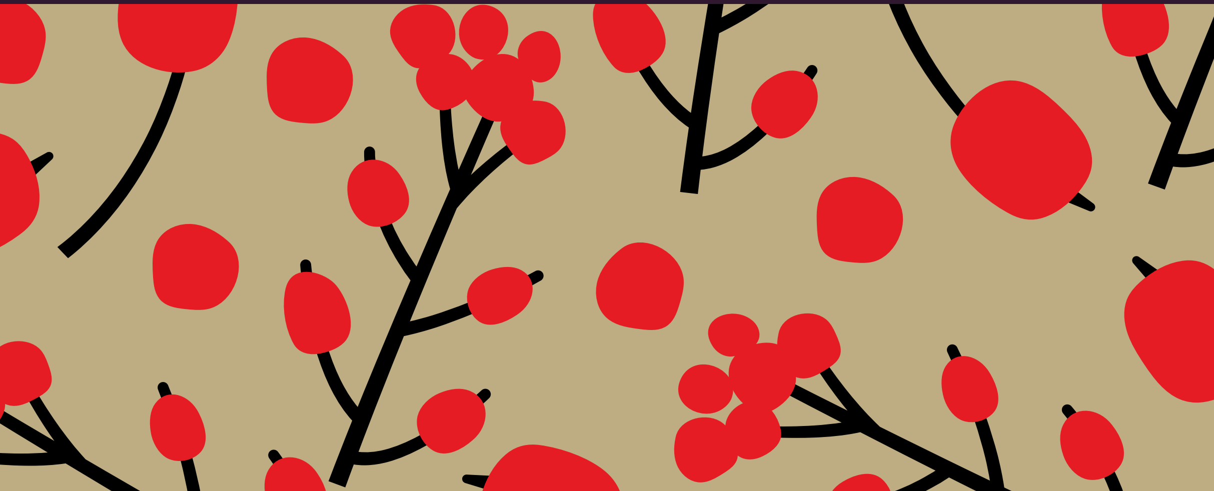
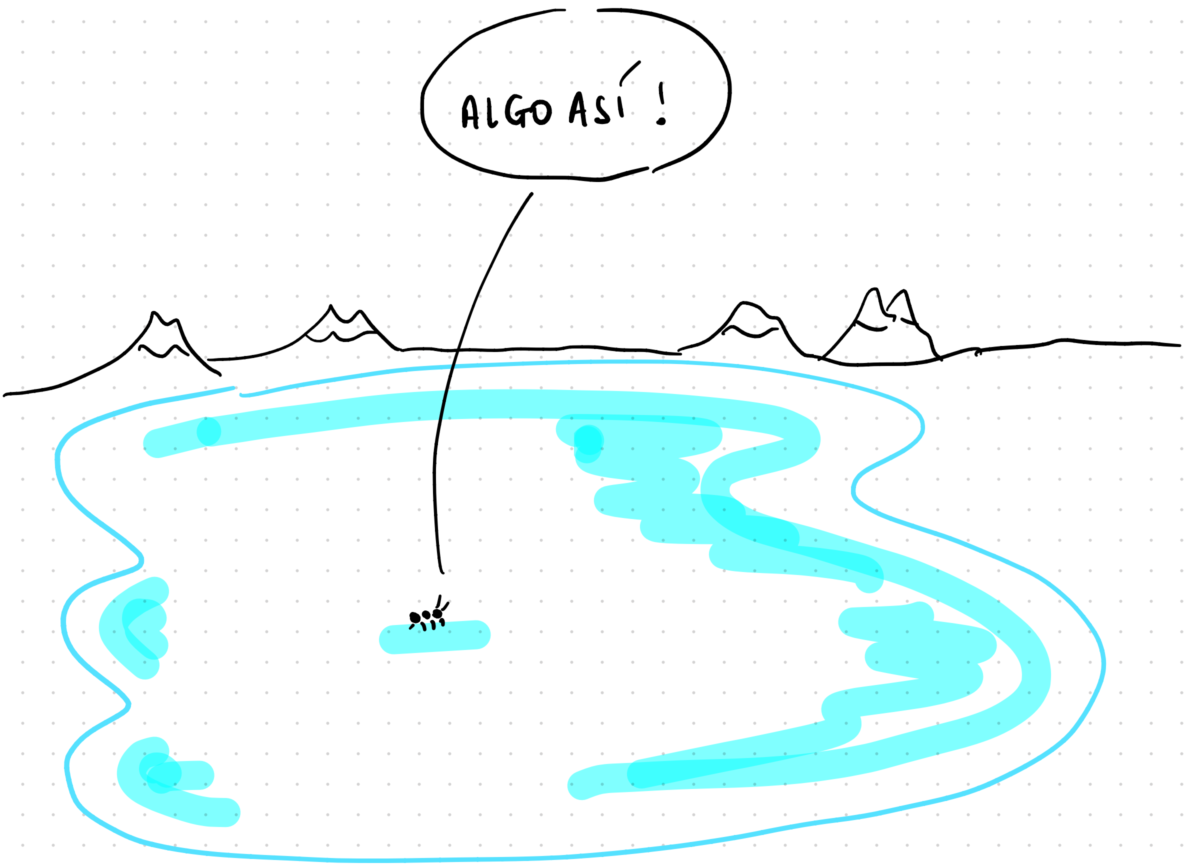
Curvas Algebraicas Planas

Renzo Cavalieri

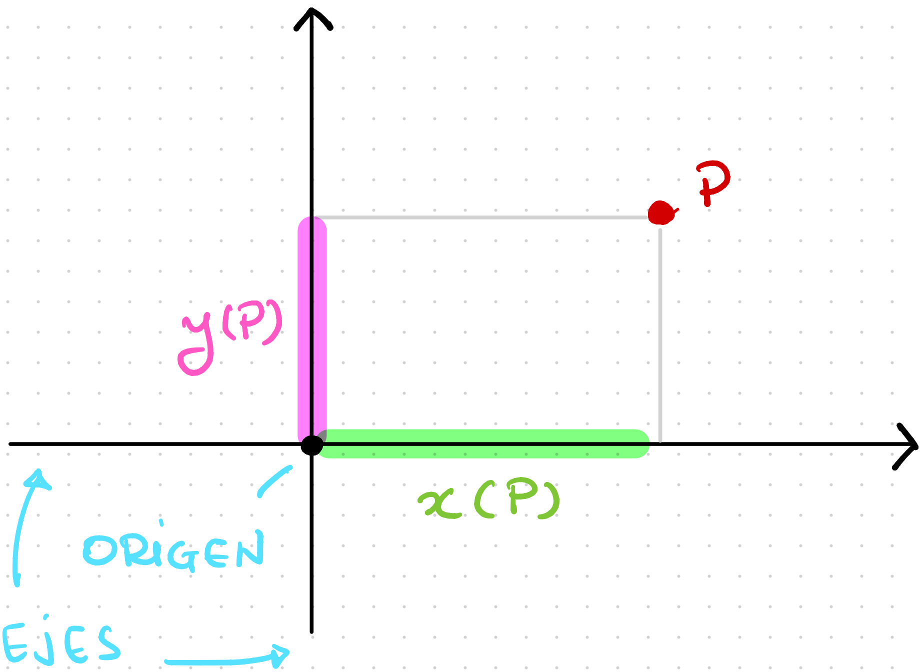
EMALCA, Guanacaste, 2024



¿Que es el plano?



El plano Cartesiano



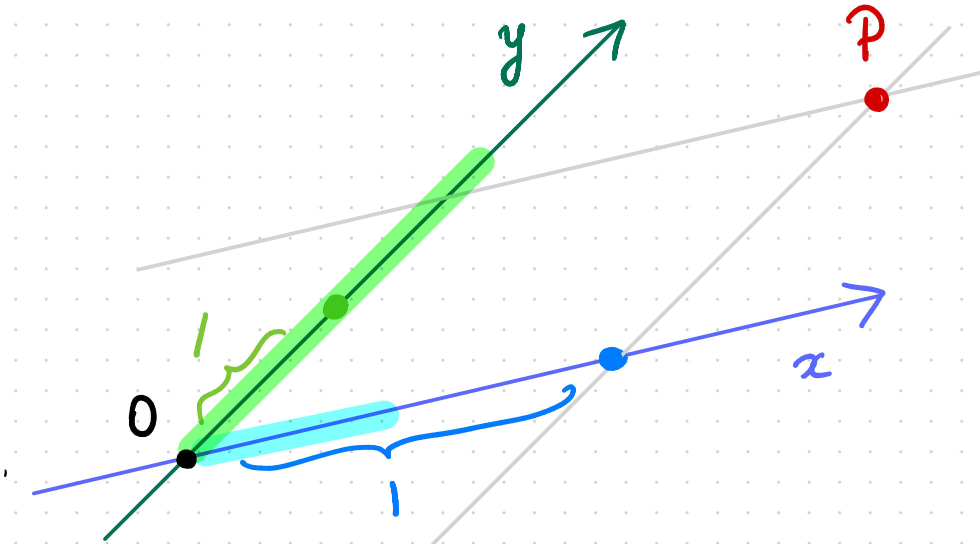
x : Plano $\longrightarrow \mathbb{R}$

y : Plano $\longrightarrow \mathbb{R}$

dos funciones que juntas dan una biyección

$$\boxed{\text{Plano} \hookrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}^2}$$

El plano afín



$x(P) = 1 \qquad y(P) = 2$

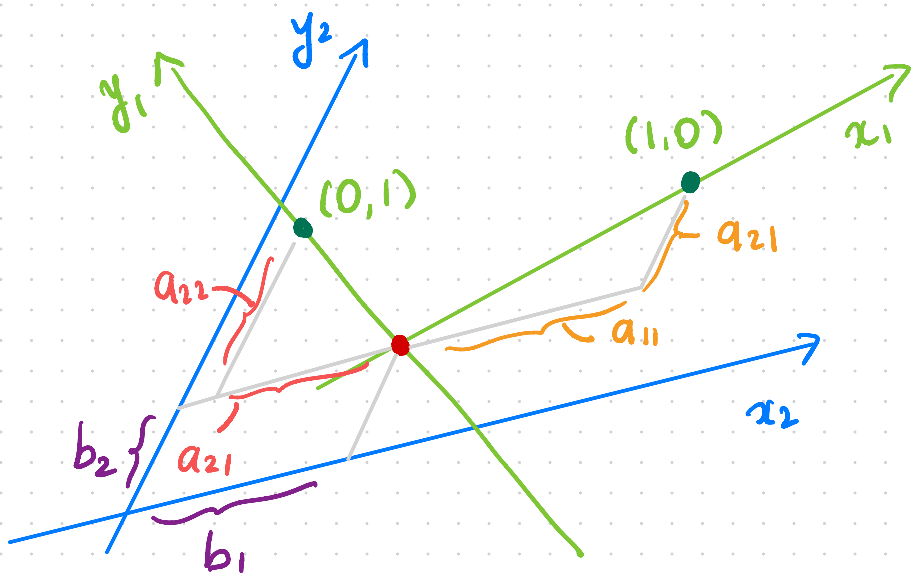
$$\boxed{\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}, (x, y)}$$

- hay coordenadas
- no se pueden medir distancias ni ángulos.

Cambio de coordenadas

$$\begin{cases} x_2 = a_{11} x_1 + a_{12} y_1 + b_1 \\ y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} y_1 + b_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$



El plano afín sobre otros campos

$$\mathbb{A}^2_K = \{(k_1, k_2) \in K^2\}$$

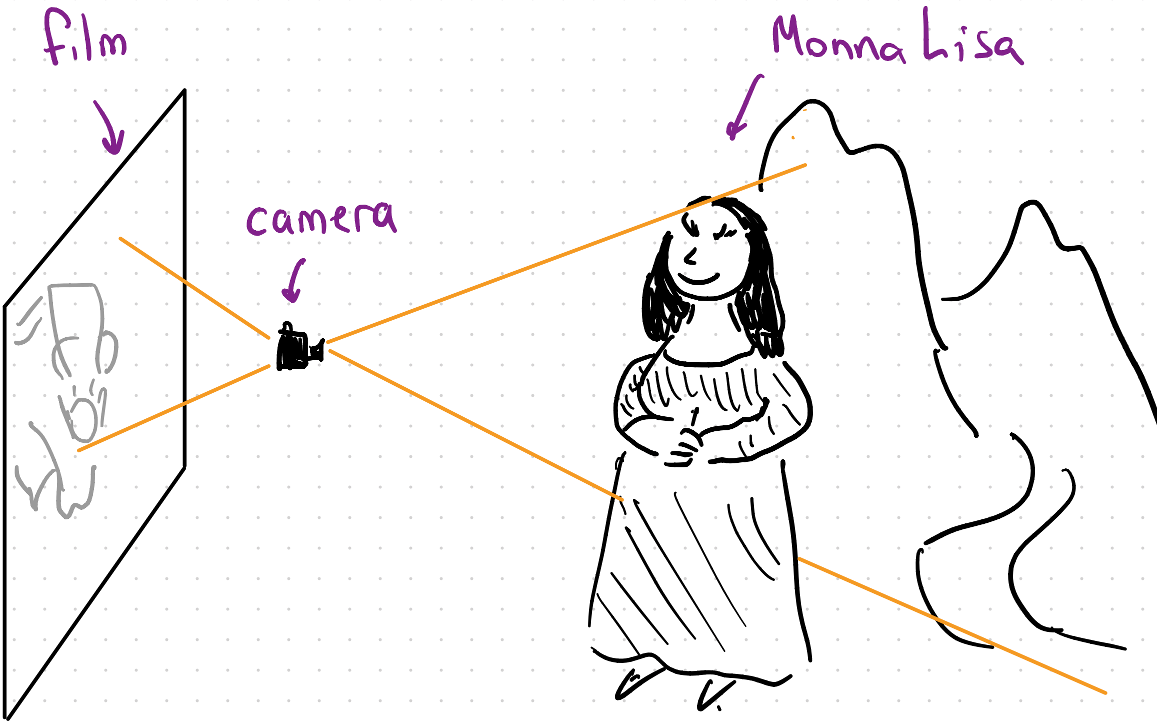
Por ejemplo:

$\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} :=$ plano afín complexo

$$\mathbb{A}^2_{\mathbb{F}_2} = \left\{ \begin{array}{cc} (1,0)\ \bullet & \bullet\ (1,1) \\ \bullet\ (0,0) & \bullet\ (0,1) \end{array} \right\}$$

Cambio de coordenadas son como antes

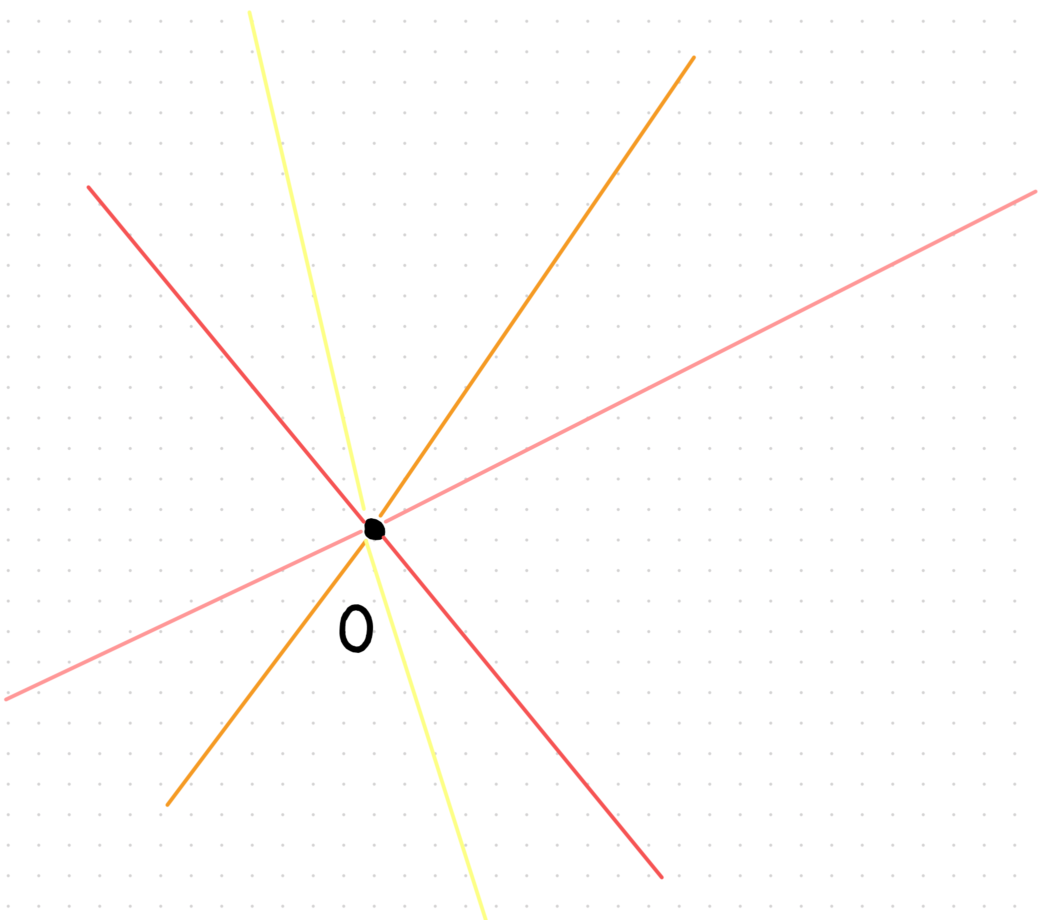
El plano proyectivo



La realidad és 3d
pero solo dibujamos en 2d

El plano proyectivo

$$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} := \left\{ \begin{array}{l} \text{subespacios} \\ \text{vectoriales de} \\ \text{dim } 1 \text{ en } \mathbb{R}^3 \end{array} \right\}$$



Coordenadas homogeneas

$$P_1 = (X(P_1) ; Y(P_1) ; Z(P_1)))$$

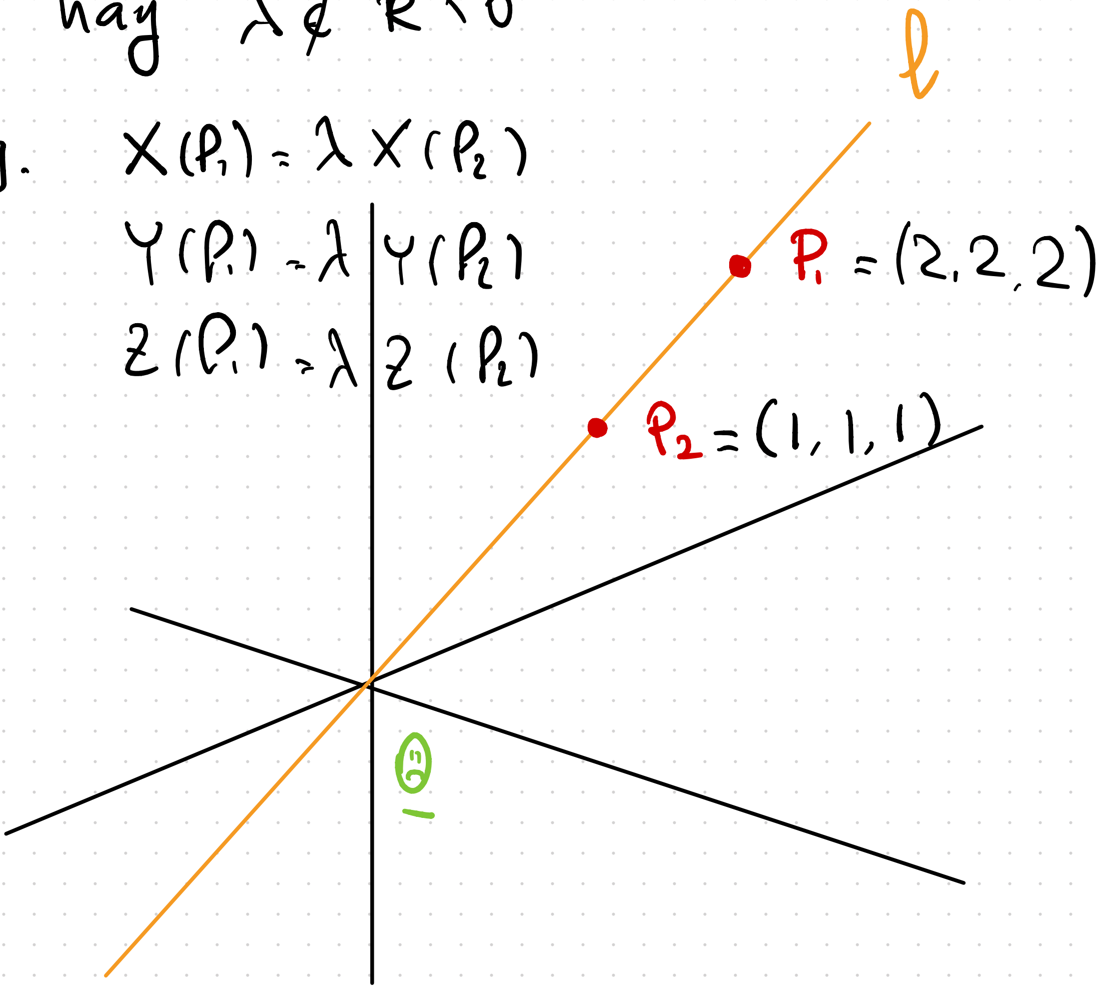
$$P_2 = (X(P_2) ; Y(P_2) ; Z(P_2))$$

si hay $\lambda \notin \mathbb{R} \setminus 0$

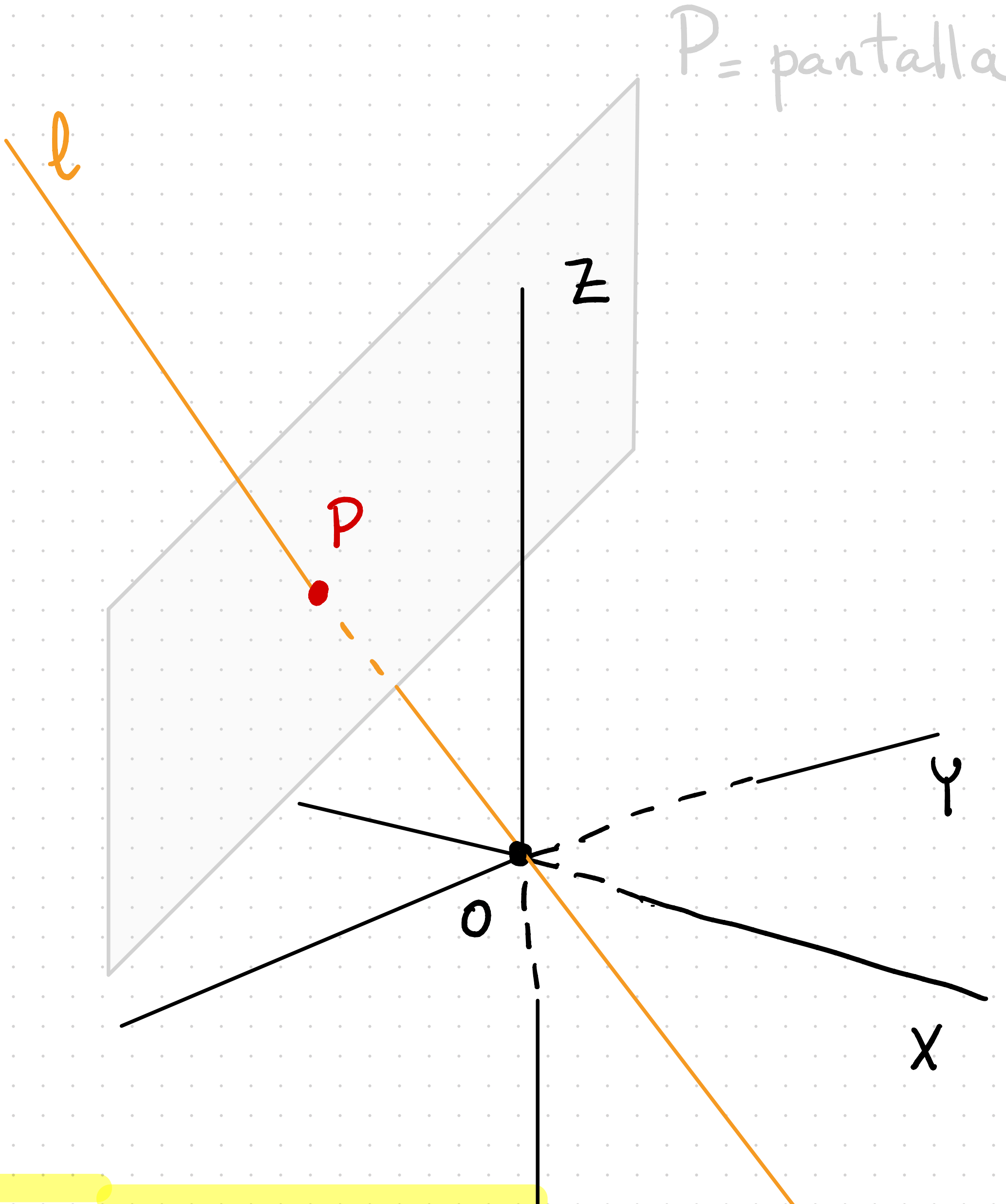
t.q. $X(P_1) = \lambda X(P_2)$

$Y(P_1) = \lambda Y(P_2)$

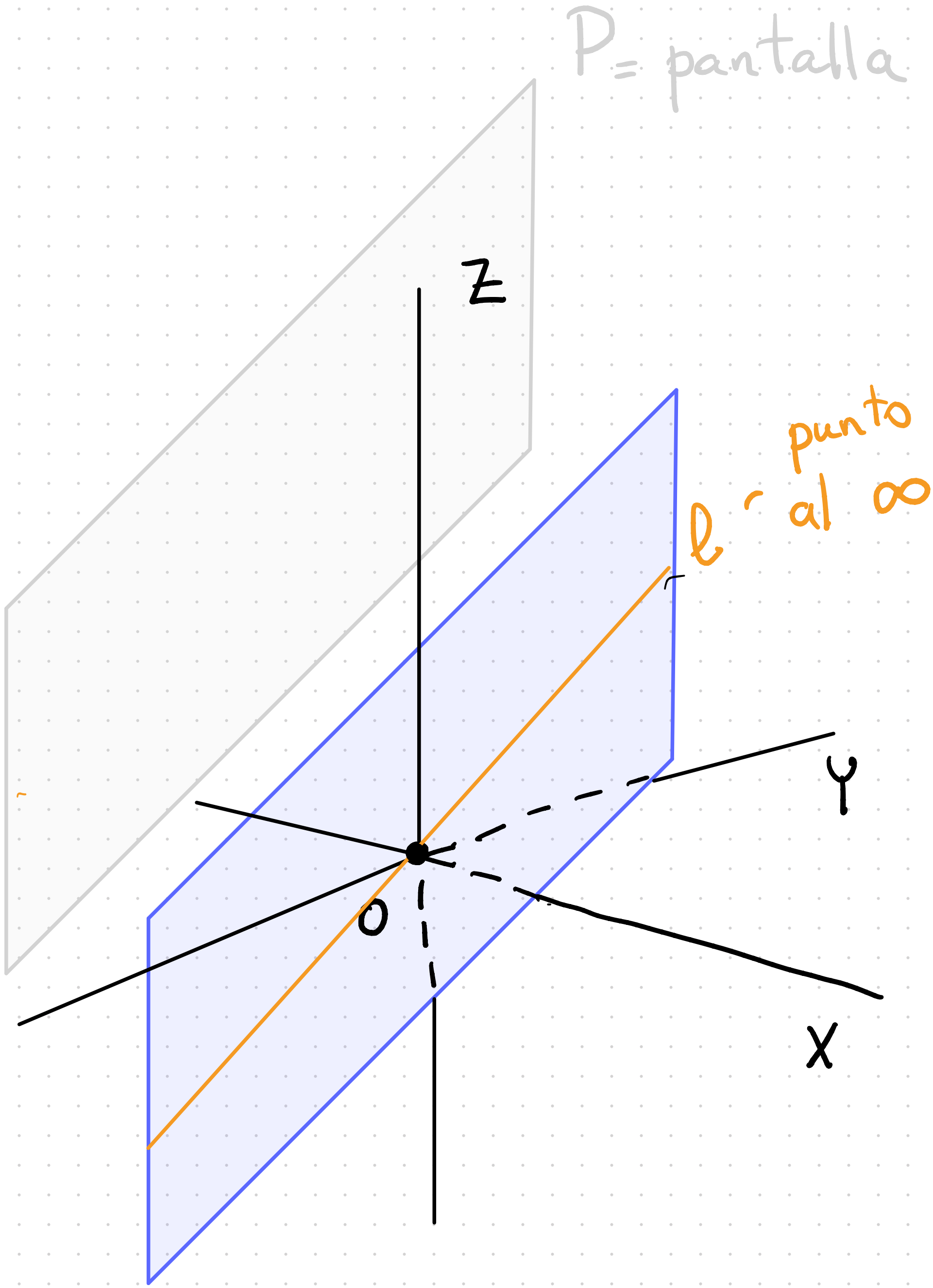
$Z(P_1) = \lambda Z(P_2)$



Porqué plano?



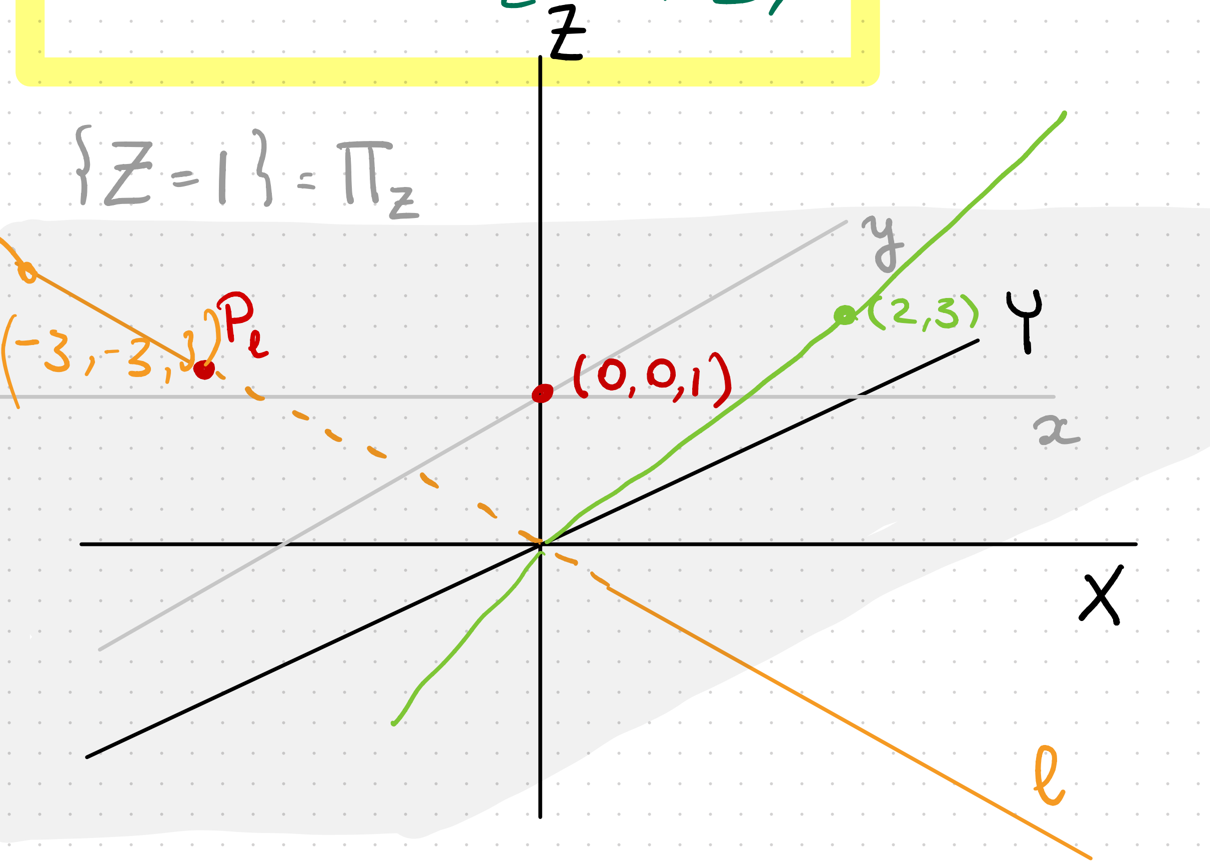
¿falta algo?


P = pantalla
Z
punto
ℓ al ∞
Y
O
X

Relación entre coordenadas

$$\Pi_Z \underset{\pi_Z}{\overset{i_Z}{\rightleftarrows}} U_Z \subseteq \mathbb{P}^2_k$$

$$\boxed{\begin{gathered}(X : Y : Z) = (x : y : 1) \\ (x, y) = \left(X/Z, Y/Z\right)\end{gathered}}$$



Proyectividad

||

$$\mathbb{P}GL(3, k)$$

$$\updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} \\ 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\det \neq 0$$

Rectas afín

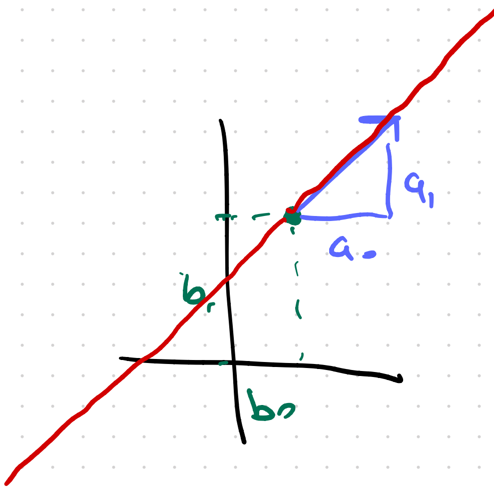
(A) ECUACIÓN

$$\{ax + by + c = 0\}$$

$$a, b, c \in \mathbb{R}$$

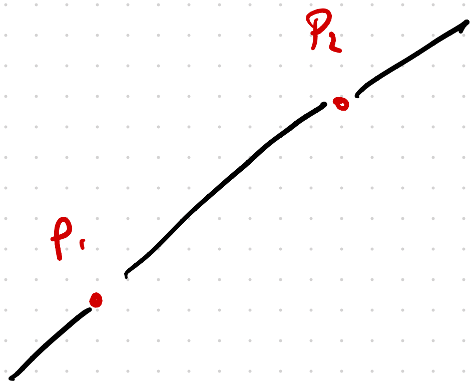
(B) PARAMETRIZACIÓN

$$\begin{cases} x(t) = a_0 t + b_0 \\ y(t) = a_1 t + b_1 \end{cases}$$

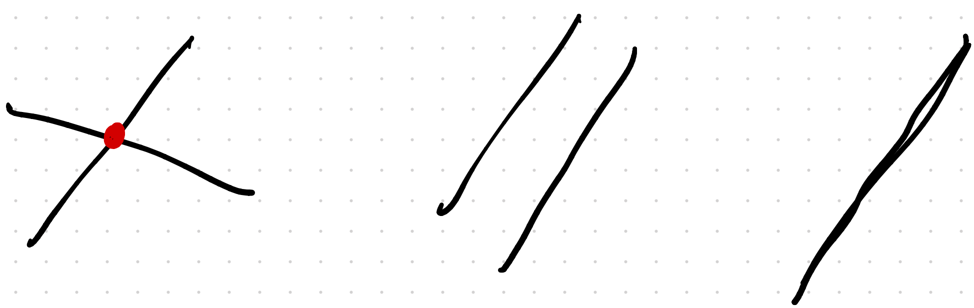


Relaciónes entre rectas afinés

① Por 2 puntos distinctos $\exists!$ recta



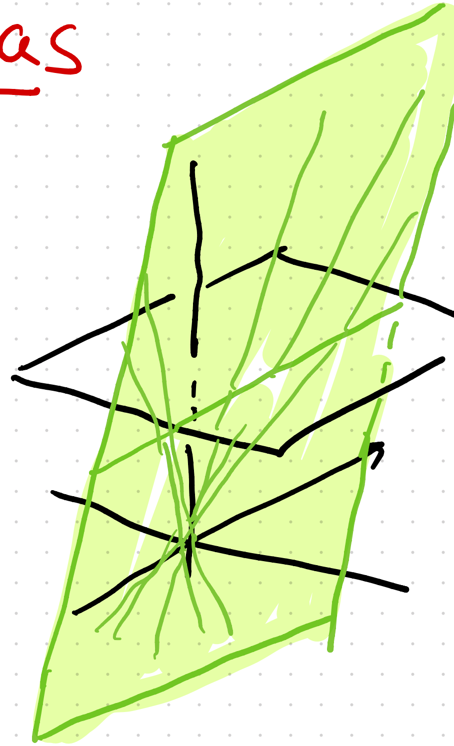
② Dos rectas en $\mathbb{A}^2$



1 $\qquad$ 0 $\qquad$ ∞

Rectas proyectivas

(A) ECUACIÓN



$$AX + BY + CZ = 0$$

(B) PARAMETRIZACIÓN

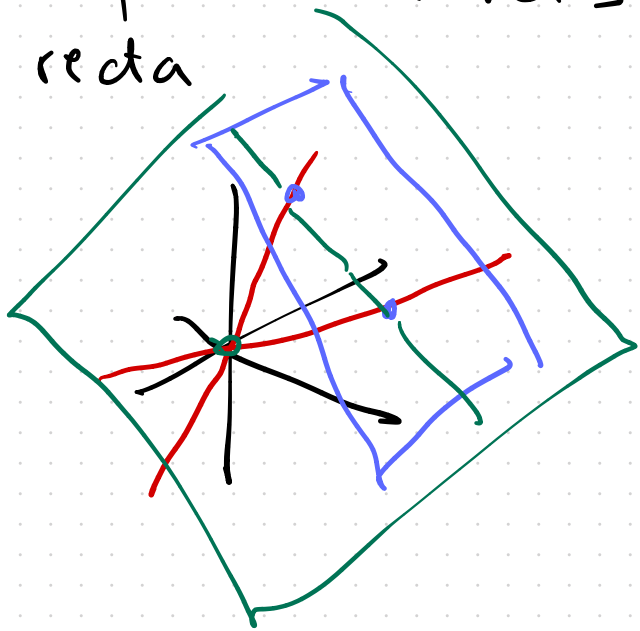
$s, t \in \mathbb{R}$

$(s,t) \neq (0,0)$

$$\begin{cases} X(s:t) = sX_0 + tX_1 \\ Y(s:t) = sY_0 + tY_1 \\ Z(s:t) = sZ_0 + tZ_1 \end{cases}$$

Relación entre rectas proyectivas

① Entre dos puntos distinctos
hay 1 recta



② 2 rectas proyectivas

se encuentran
en 1 pto

se encuentran
en ∞-puntos
(la misma
recta)

Curvas afines

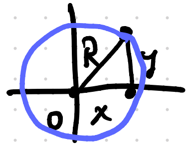
Definición 2.1. Una **curva algebraica plana afín** $C \subset \mathbb{A}_k^2$ es el lugar geométrico de los puntos en el plano cuyas coordenadas satisfacen una ecuación polinomial en dos variables; es decir, sea $f(x, y) \in k[x, y]$, entonces:

$$C = \{p \in \mathbb{A}_k^2 | f(x(p), y(p)) = 0\}.$$

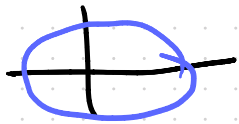
Ej 0: lineas

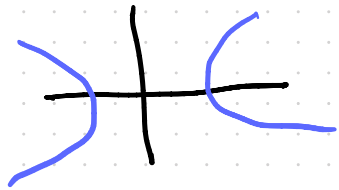
$$\underbrace{ax + by + c}_{f} = 0$$

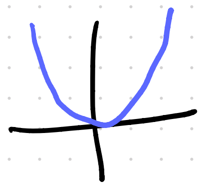
Ej's: f — $V(f)$

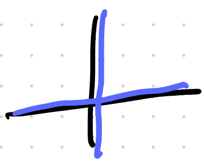
- $x^2 + y^2 - R^2$ 

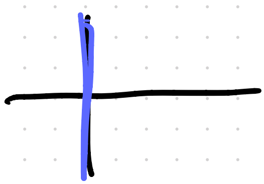
  $\mathbb{R}$

- $a^2x^2 + b^2y^2 - c^2$ 

- $a^2x^2 - b^2y^2 - c^2$ 

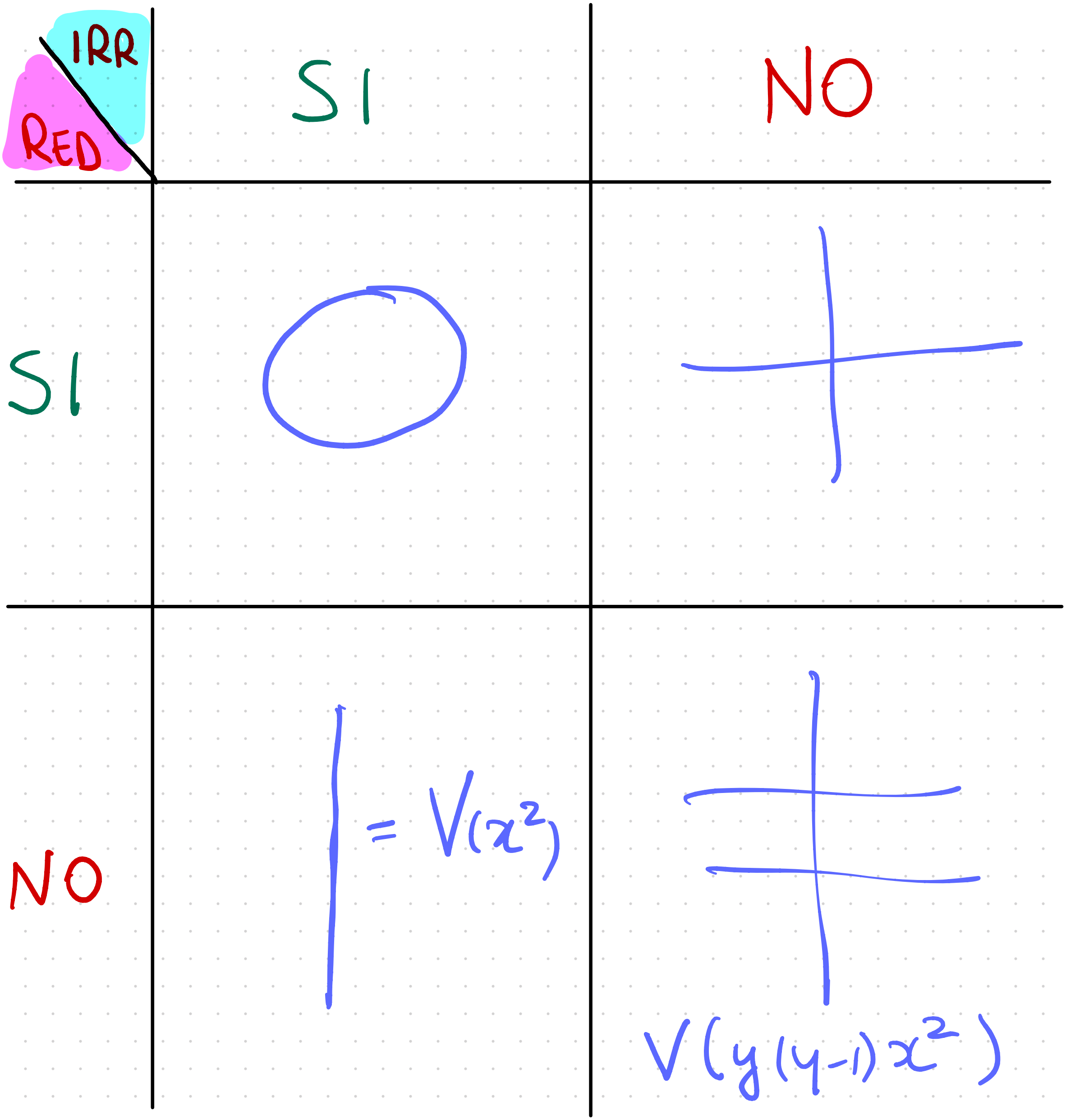
- $y - x^2$ 

- xy 

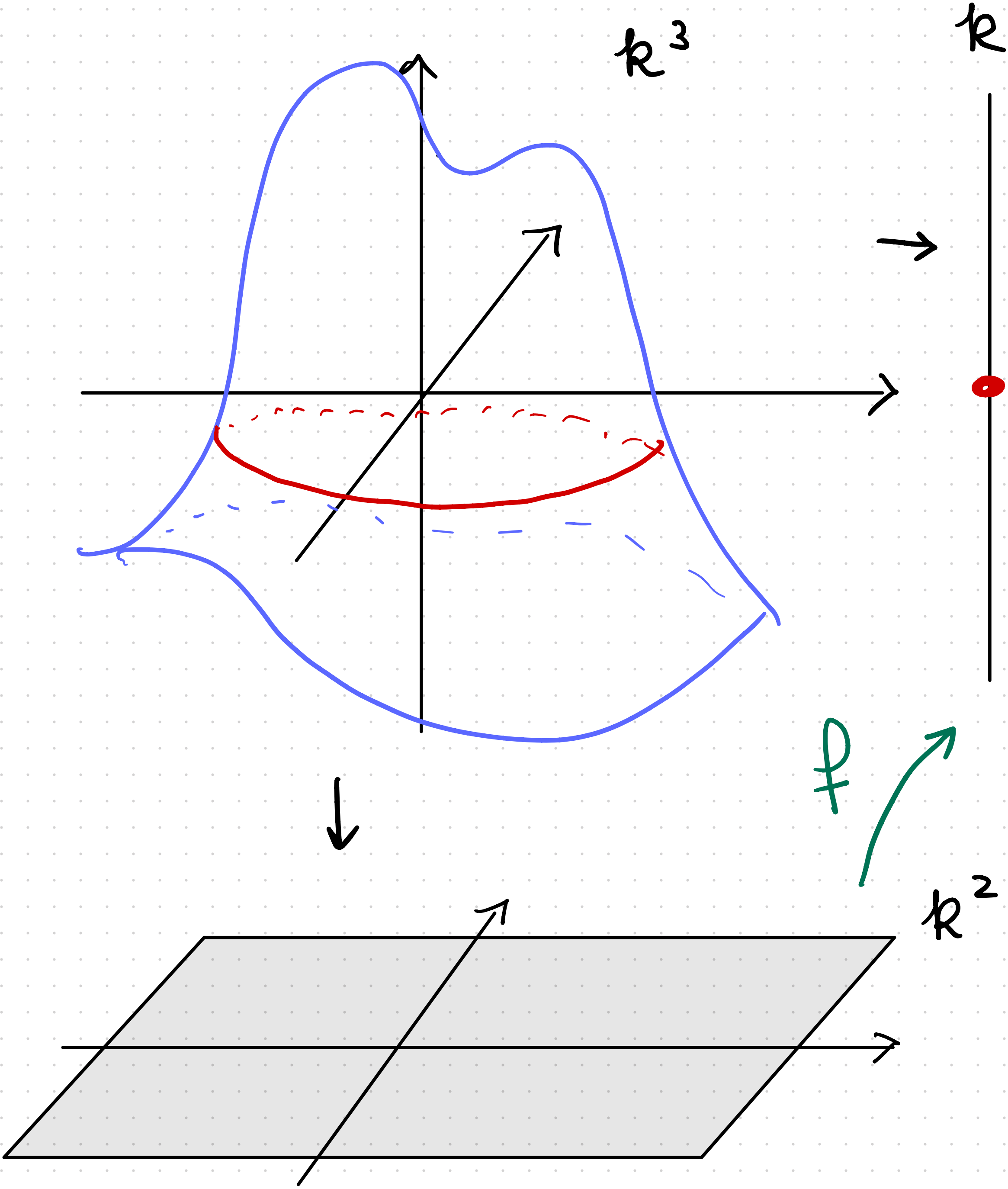
- x^2 

Definición 2.4. Una curva plana afín C es **irreducible** si no puede escribirse como la unión no trivial de dos curvas algebraicas C_1, C_2. (es decir, ambos $C_i \neq C$ para $i = 1, 2$.)

Una curva plana afín C de grado d se dice **reducida** si no es igual a una curva plana afín de grado estrictamente inferior.



Recuerdo de Cálculo



Transformacciones de curvas

$$\begin{tikzcd} T : \mathbb{A}^2_k \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathbb{A}^2_k \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ k & k \end{tikzcd}$$

$$T \quad \begin{cases} u = 5x^2 + 7x^2y^3 + 5 \\ v = 19x^3 + 8xy \end{cases}$$

Parametrizaciones

Definición 2.7. Una **parametrización** de una curva plana afín C es una función genéricamente inyectiva $\phi : k \to \mathbb{A}^2_k$ de la forma:

$$\phi : \begin{cases} x(t) = \frac{p(t)}{q(t)} \\ y(t) = \frac{r(t)}{s(t)} \end{cases},$$

con $p, q, r, s \in k[t]$.

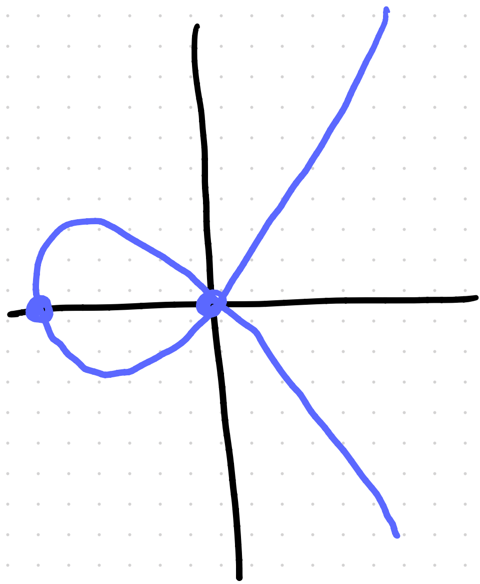
Ej:

$$\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{t^3 - t}{t^2 - 1} = t$$

$$x = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1$$

$$\boxed{x^3 = y^2 - x^2}$$



$t = 0 \Rightarrow (x,y) = (-1,0)$

$t = \pm 1 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$

¿Porqué es algebraica?

Curvas proyectivas

"$f(x,y,z)=0$" no tiene sentido en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$

$$X^2+Y^2+Z^2-1=0$$

$$P=(0:0:5) = 25-1=24$$

$$X^2+Y^2-Z^2=0$$

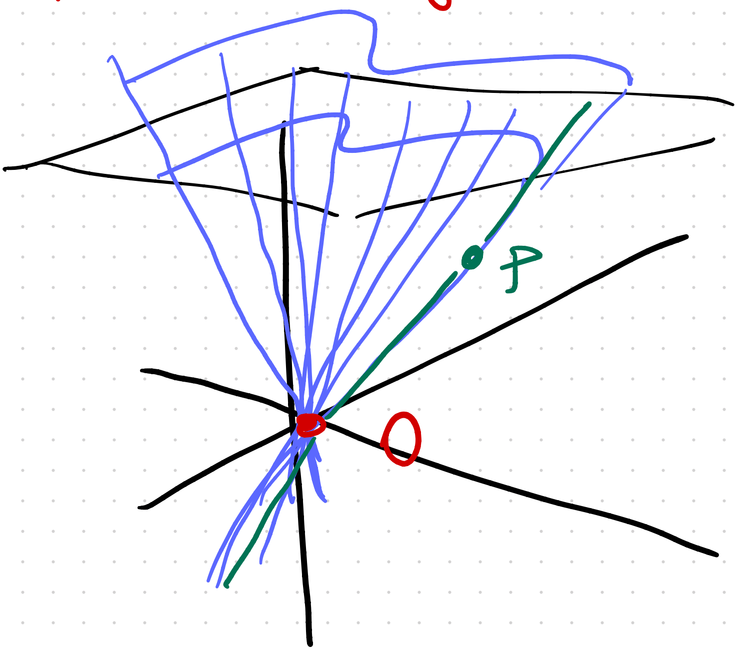
$$Q=(0:5:5) = 25-25=0$$

$$=25(1-1)$$

Definición 2.8. Una **curva algebraica del plano proyectivo** $C \subset \mathbb{P}_k^2$ es el lugar geométrico de los puntos en el plano cuyas coordenadas homogéneas satisfacen una ecuación polinomial homogénea en tres variables; es decir, sea $F(X, Y, Z) \in k[X, Y, Z]$ homogéneo, entonces:

$$C = \{\bar{p} \in \mathbb{P}_k^2 | F(X(p) : Y(p) : Z(p)) = 0, \ (p \in k^3)\}.$$

- Cono afín
- Equivalencia proyectiva ≠ isomorfismo



Definición 2.9. Una **parametrización** de una curva plana proyectiva C es una función genéricamente inyectiva $\phi : \mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^2_k$ de la forma:

$$\phi : \begin{cases} X(S:T) = P(S,T) \\ Y(S:T) = Q(S,T) \\ Z(S:R) = R(S,T) \end{cases},$$

con $P, Q, R \in k[S,T]$ polinomios homogéneos del mismo grado d.

¿Como se relaciona con el caso afín?

$$x = t^2 - 1 \qquad X = T^2 S - S^3$$

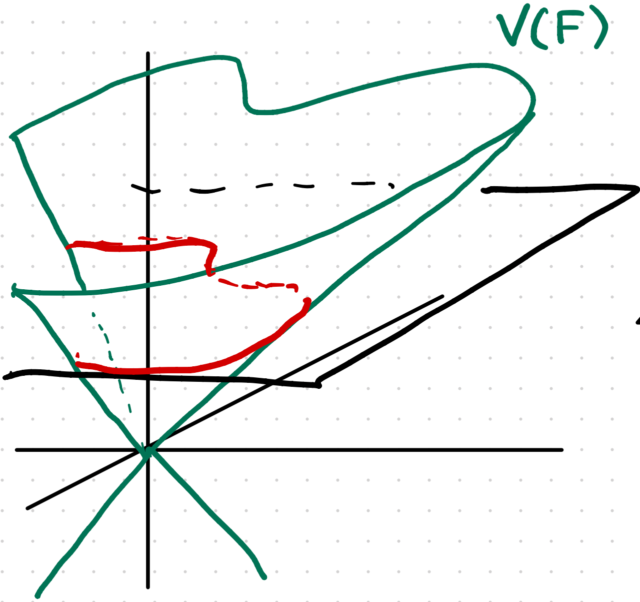
$$y = t^3 - t \qquad Y = T^3 - TS^2$$

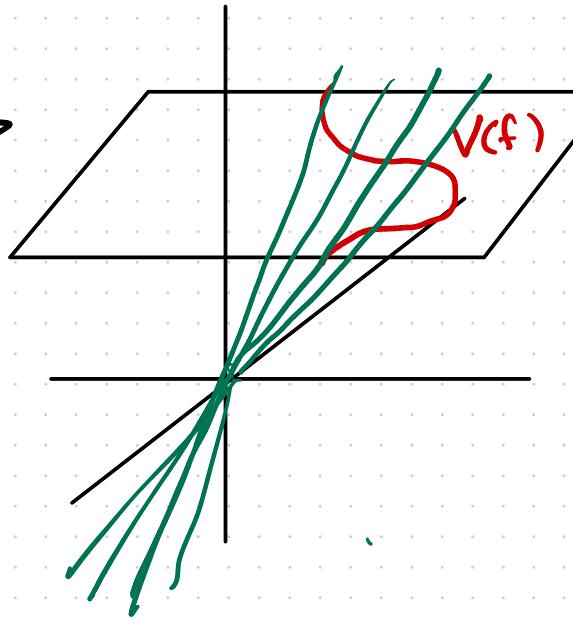
$$Z = S^3$$

$$(T,S) = (t,1)$$

$$(x,y) = \left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$$

Traza afín y cierre proyectivo





$$\boxed{Z=1}$$

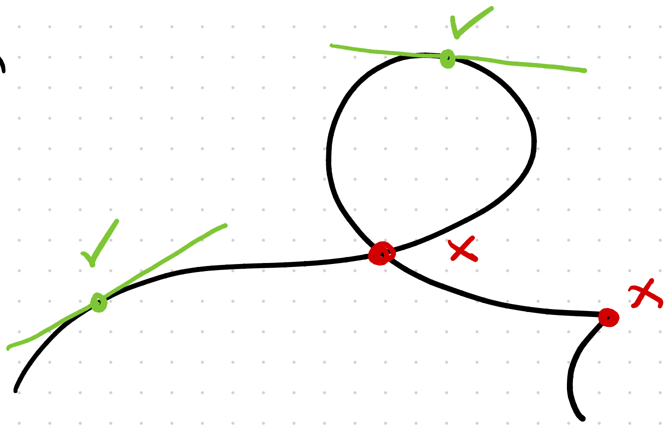
$X=x$
$Y=y$
$Z=1$

$$X^2+Y^2-9Z^2=0 \rightsquigarrow x^2+y^2-9=0$$

$$X^2-YZ+5Z^2=0 \rightsquigarrow x^2-y+5=0$$

Suavidad y recta tangente

Intuición



Definición 2.11. Sea $p \in C = V(f)$ un punto de una curva plana afín en $\mathbb{A}^2_k$. Decimos que C es **suave en p** si

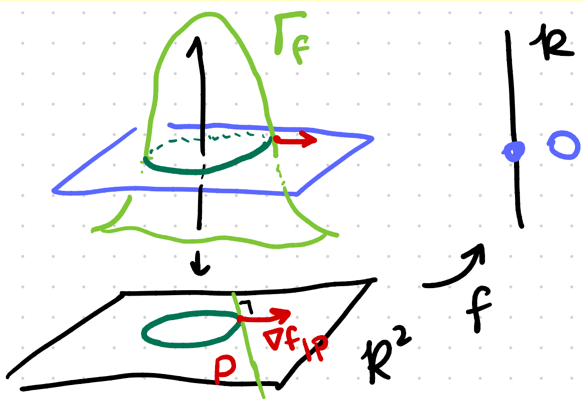
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p)\right) \neq (0,0),$$

es decir, si al menos una de las derivadas parciales de f no es cero en p.

Decimos que C es una curva **suave** si es suave en todos los puntos.

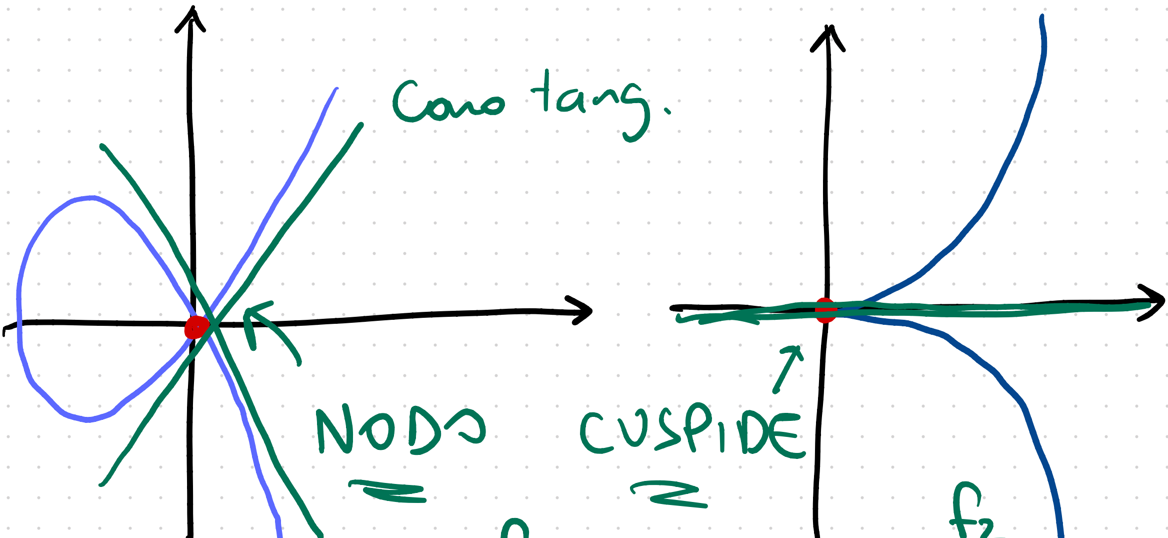
Si C es suave en un punto p, entonces la **recta tangente** a C en p se define como:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p)\right) \cdot (x - x(p), y - y(p)) = 0.$$



Puntos singulares

Definición 2.12. Sea p un punto singular de $V(f)$, y sin pérdida de generalidad supongamos que hemos elegido un sistema de coordenadas tal que $p = (0,0)$. Entonces p se dice ser m-**tuplo** si m es el grado más bajo que aparece en un monomio de f con coeficiente distinto de cero.



f_2 $\quad\quad$ f_2

$V(x^3 + x^2 - y^2)$ $\quad\quad$ $V(x^3 - y^2)$

$V((x-y)\cdot(x+y))$ $\quad\quad$ $V(y^2)$

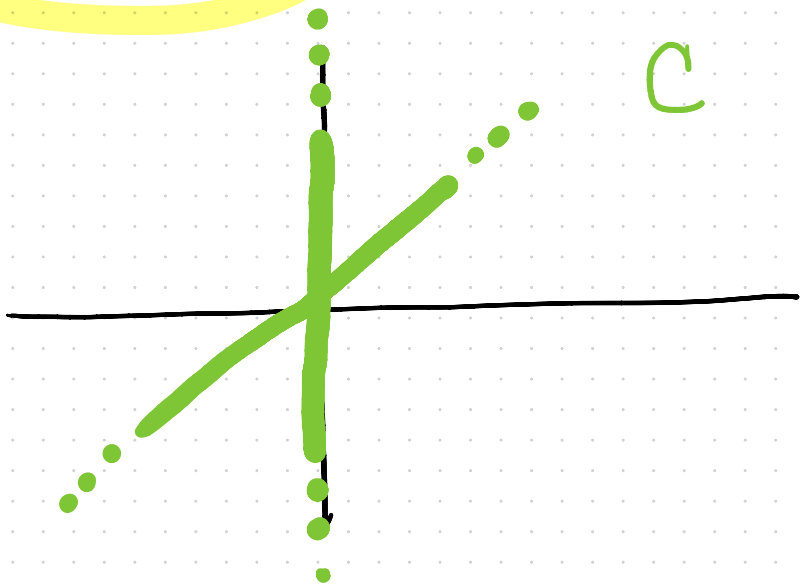
Cono tangente $:= V(f_m)$

¿Como approximar curva cerca de una singularidad?

Ej: $V(x^4 + y^4 + x^2 + xy)$

(A) Como tangente

$$V(x^2 + xy) = V(x(x+y))$$



(B) Analysis de los infinitesimales

$$f: x^4 + y^4 + x^2 + xy$$

$$\boxed{x \rightsquigarrow \mathcal{O}(m) \qquad y \rightsquigarrow \mathcal{O}(n)}$$

$$\Downarrow$$

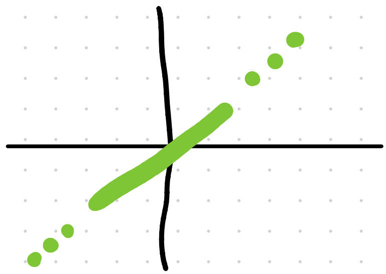
$$x^4 = \mathcal{O}(4m)$$
$$y^4 = \mathcal{O}(4n)$$
$$x^2 = \mathcal{O}(2m)$$
$$xy = \mathcal{O}(m+n)$$

queremos 2 ordens iguales y mas pequeños que los demas!

$m=1,\ n=1$

$$\vartheta(x^2)=\vartheta(xy)=2<4=\vartheta(x^4)=\vartheta(y^4)$$

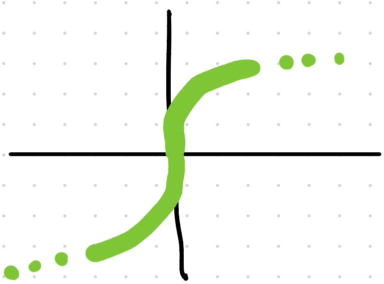
$$x^2+xy = x(x+y)$$



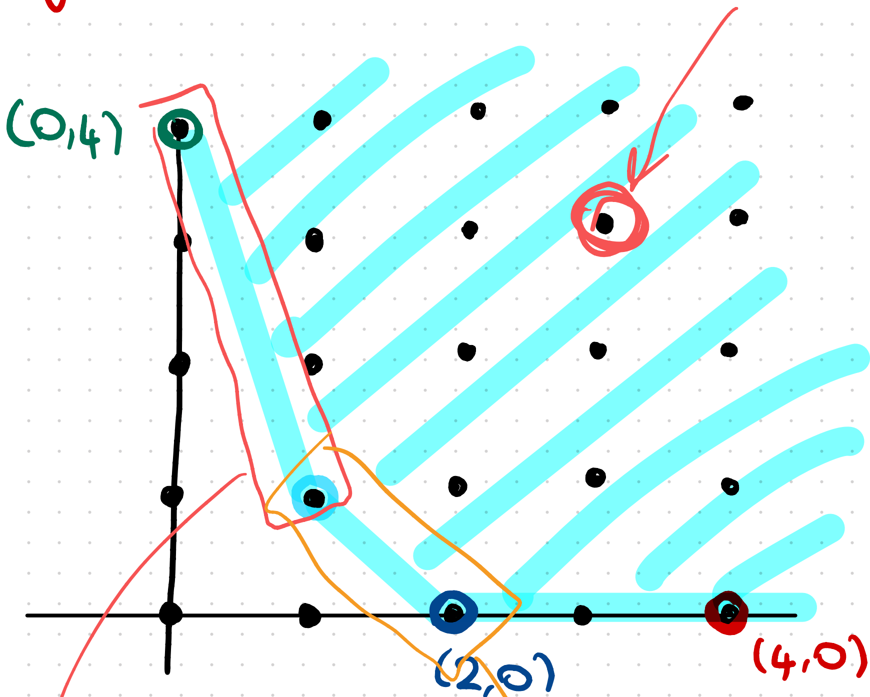
$m=3,\ n=1$

$$\vartheta(xy)=\vartheta(y^4)=4<\vartheta(x^2)<\vartheta(x^4)$$

$$xy+y^4 = y(x+y^3)$$



Polígono de Newton



$$f = x^4 + y^4 + x^2 + xy + x^3y^3$$

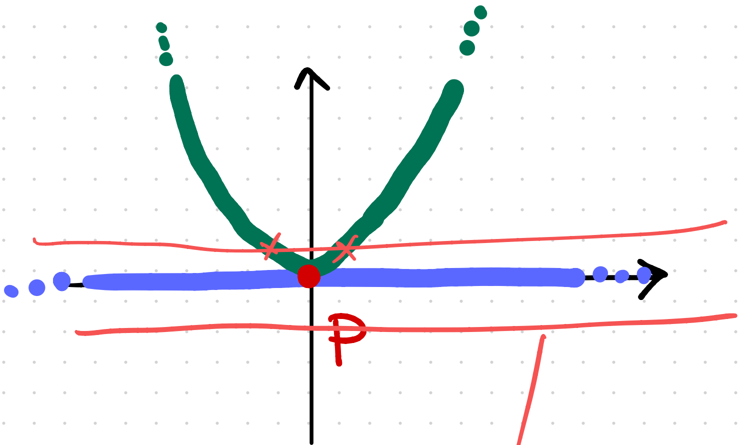
$y^4 + xy$

$x^2 + xy$

envolvente convexa inferior

Intersección de curvas

$$|V(y) \cap V(y - x^2)| = ?$$

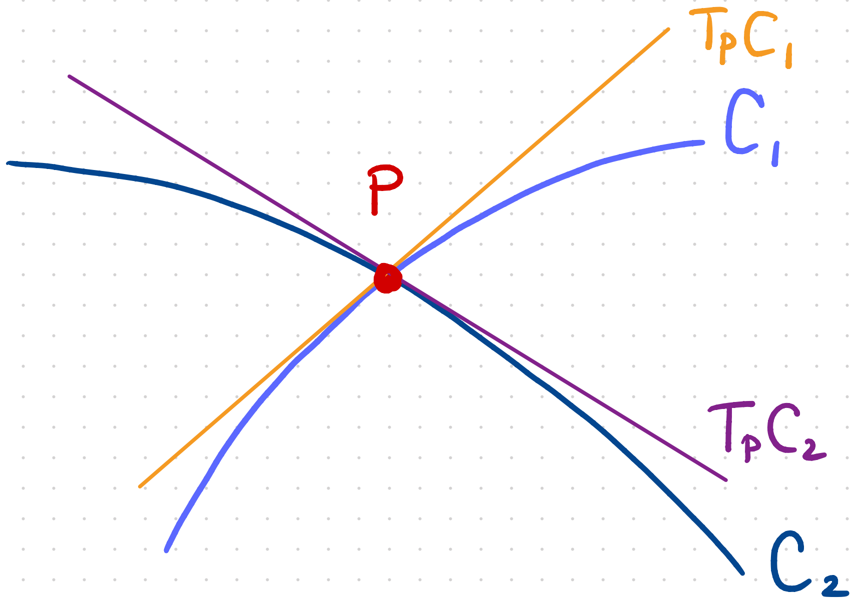


¿ Problemas ?

trabaja sobre $\mathbb{C}$

- $K = \overline{K}$

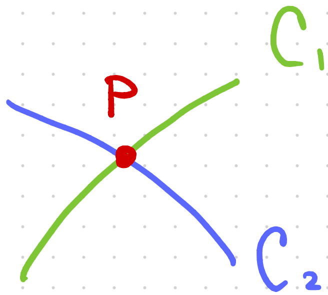
Intersección transversal



1. p punto suave de C_1, C_2
2. $T_p C_1 \neq T_p C_2$

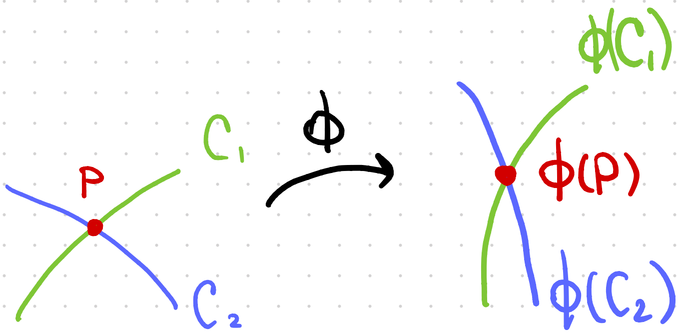
Deseos sobre $m_p(C_1, C_2)$

① simetría



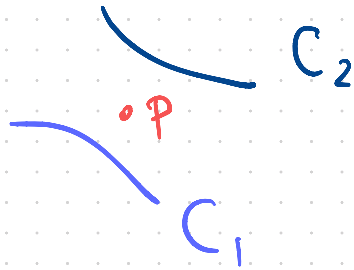
$$m_p(C_1, C_2) = m_p(C_2, C_1)$$

② cambio de coordenadas



$$m_p(C_1, C_2) = m_{\phi(p)}(\phi(C_1), \phi(C_2))$$

③ $p \notin C_1 \cap C_2$

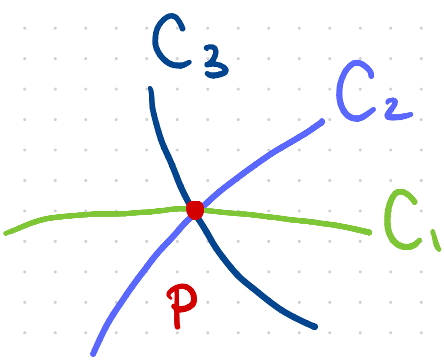


$$m_p(C_1, C_2) = 0$$

④ p $\cap$ transversa

$$m_p(C_1, C_2) = 1$$

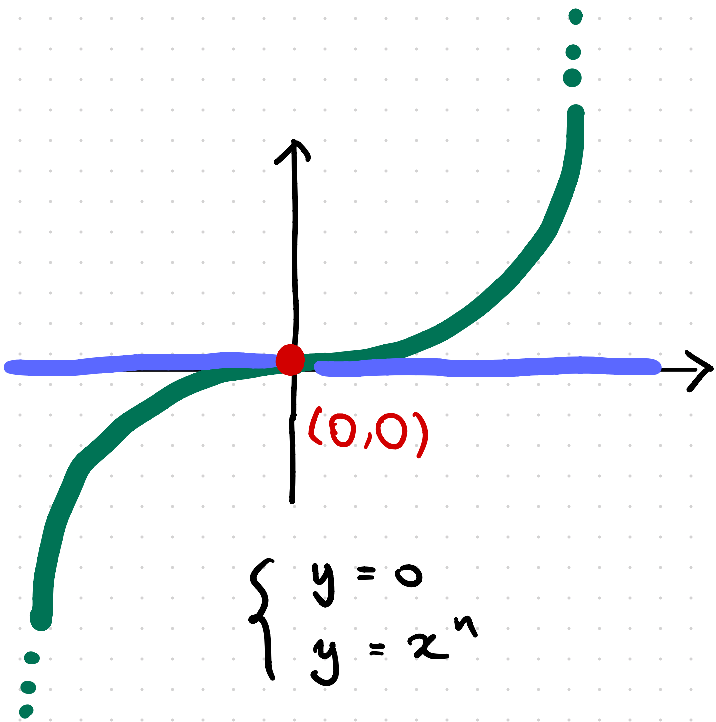
⑤ Aditividad



$$m_p(C_1, C_2 \cup C_3) = m_p(C_1, C_2) + m_p(C_1, C_3)$$

⑥ T. fund del algébra

$$m_{(0,0)}\left(V(y), V(y-x^n)\right) = n$$



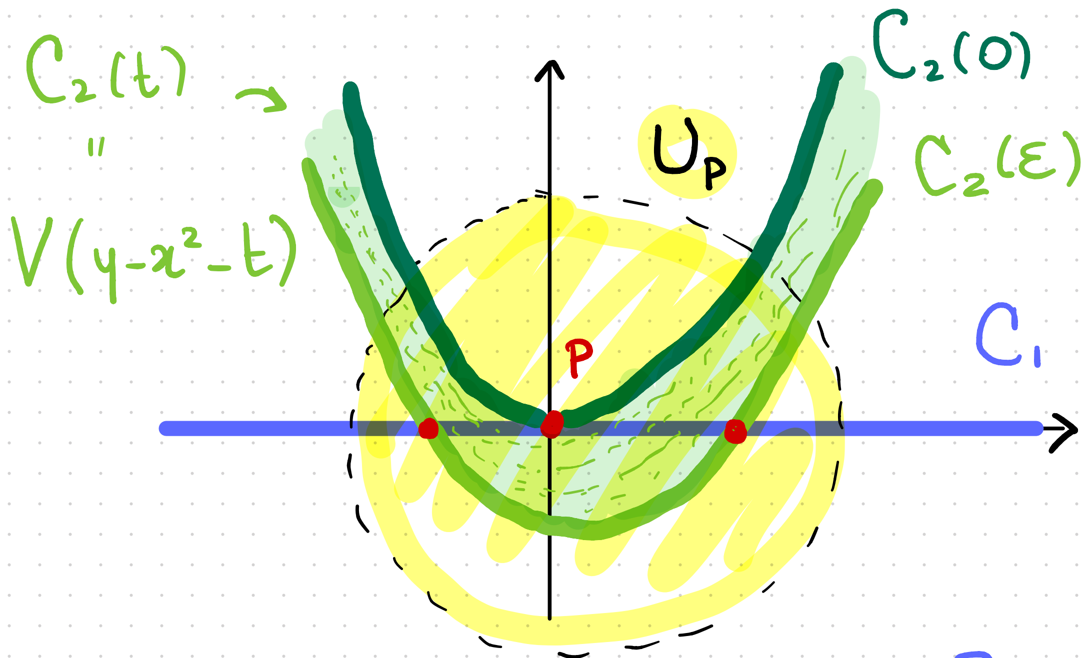
$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = x^n \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{x = 0}$$

T.F.A

Son n-raices !!!

⑦ Invariancia de deformación



$\exists \varepsilon$

$|t| < \varepsilon$

$$\boxed{m_p(C_1, C_2(0)) = \sum_{\tilde{p} \in U_p} m_{\tilde{p}}(C_1, C_2(t))}$$

cualquiera pero fixo!

Algebra

Definición 3.2. El **anillo local** de $\mathbb{A}^2_k$ en el origen, denotado $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_k,\mathbf{0}}$, viene dado por:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_k,\mathbf{0}} = \left\{ \frac{f}{g} | f, g \in k[x,y], g(0,0) \neq 0 \right\}.$$

$$m_{(0,0)}(V(f_1), V(f_2))$$

$$\text{ii}$$

$$\dim_k \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_k,(0,0)}}{\langle f_1, f_2 \rangle}$$

$$\mathfrak{m} = \langle x, y \rangle$$

$x+1$ es invertible!

Ej 0: $p \notin C_1$

$$f_1 = x+y+1$$
$$f_2 = xy$$

$$f_1(0,0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{x+y+1} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_k,(0,0)}$$

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \langle 1 \rangle = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_k,(0,0)}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,00}}{\langle f_1 f_2 \rangle} = \{0\} \Rightarrow \dim 0$$

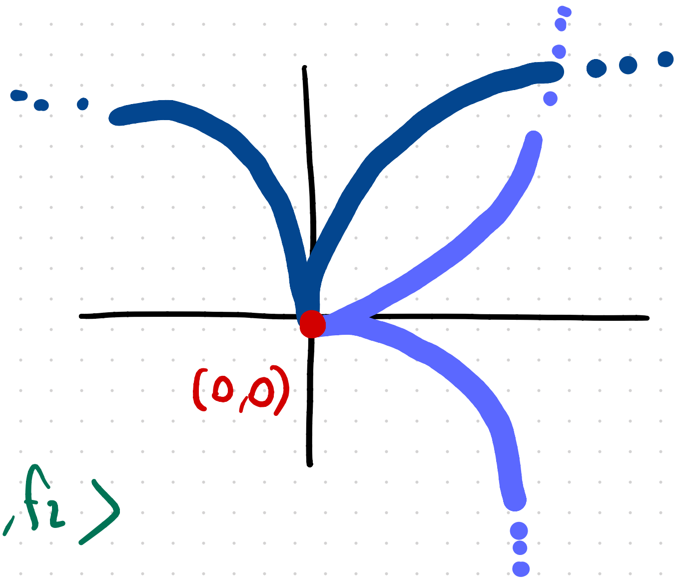
Ej 1: $m_{(0,0)}\left(V(y), V(x^4 + x^5 y + x^7)\right)$

$$\langle y, x^4 + x^5 y + x^7 \rangle = \langle y, x^4 + x^7 \rangle$$

$$= \langle y, x^4(1+x^3) \rangle = \langle y, x^4 \rangle$$

$$\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,(0,0)}}{\langle y, x^4 \rangle} = \mathrm{Span}(1, x, x^2, x^3)$$

Ej 2: $m_{(0,0)}\left(V(y^2-x^3),\ V(x^2-y^3)\right)$



$\langle f_1, f_2 \rangle$
$\quad ''$

$\langle y^2-x^3,\ x^2-y^3+(y(y^2-x^3)) \rangle =$

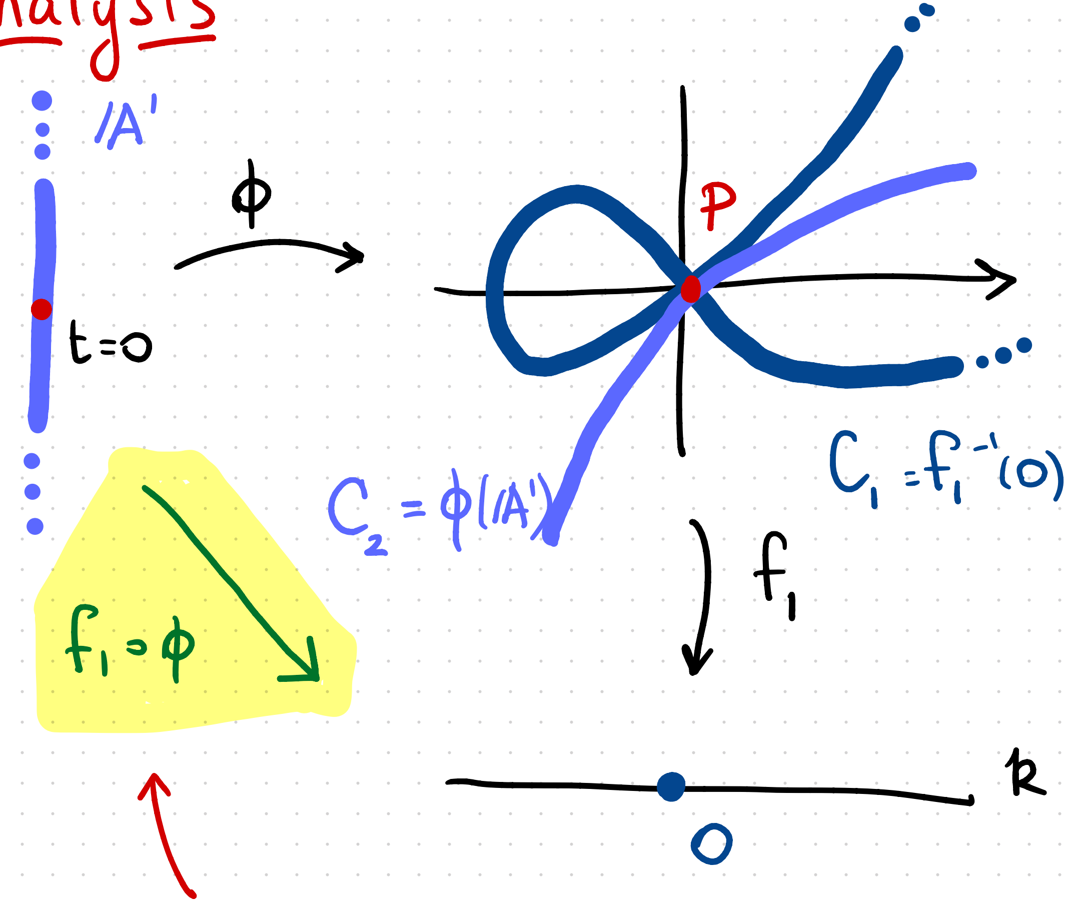
$\langle y^2-x^3,\ x^2-yx^3 \rangle = \langle y^2-x^3,\ x^2(1-yx) \rangle$

$= \langle y^2-x^3,\ x^2 \rangle = \langle y^2, x^2 \rangle$

$m = 4$

$$\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,(0,0)}}{\langle f_1, f_2 \rangle} = \langle 1, x, y, xy \rangle$$

Analysis

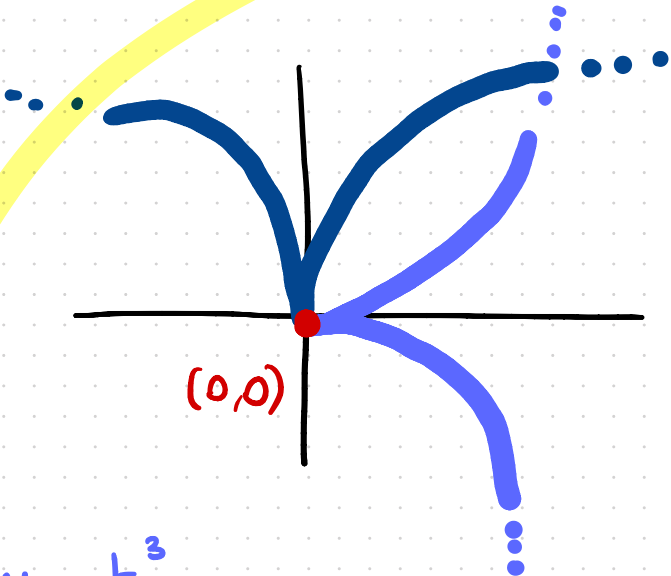


$$\boxed{m_P(C_1, C_2) = \operatorname{ord}(f_1 \circ \phi)_{|t=0}}$$

¿Si $\nexists$ parametrización?

Ej 1 : $m_{(0,0)}\left(V(y),\ V(x^4 + x^5 y + x^7)\right)$

Ej 2: $m_{(0,0)}\left(V(y^2-x^3), \underline{\underline{V(x^2-y^3)}}\right)$



$\begin{cases} y = t^3 \\ x = t^2 \end{cases}$

$t \longrightarrow (t^2, t^3)$

$(x, y) \longrightarrow x^2 - y^3$

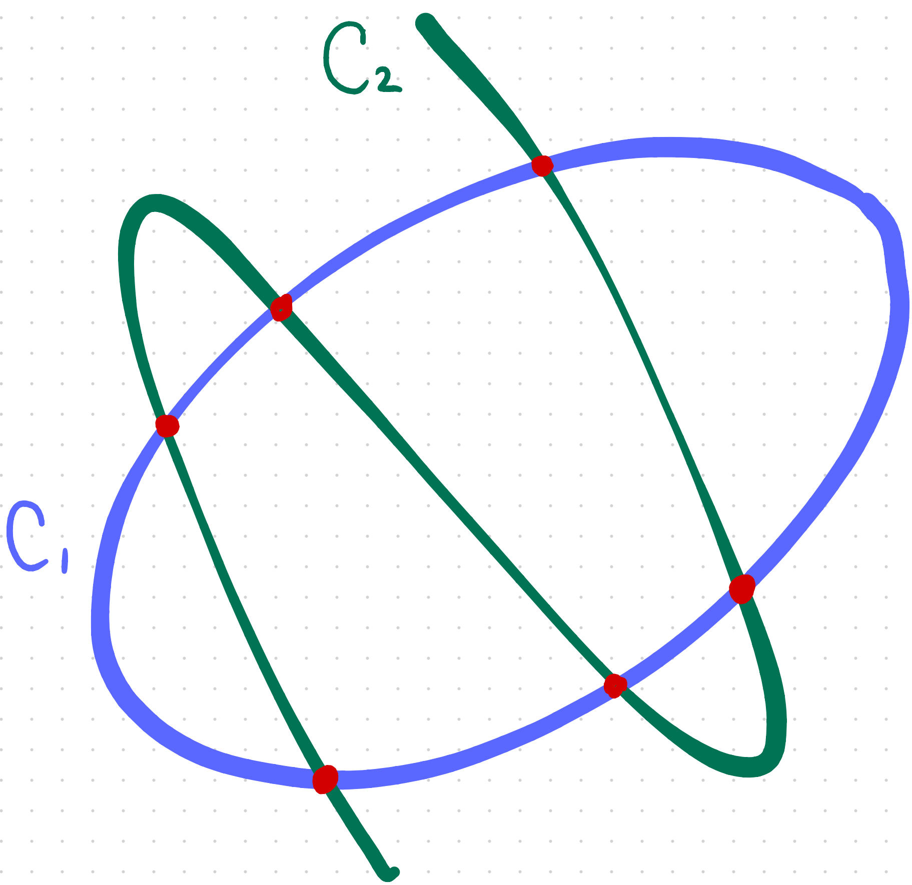
$\longrightarrow t^4 - t^9$

$m = 4$

Teorema de Bézout

Teorema 4.1 (Bézout). *Sean $C_1 = V(F_1), C_2 = V(F_2)$ dos curvas planas proyectivas complejas, y sean $d_1 = \deg(F_1)$, $d_2 = \deg(F_2)$. Si C_1 y C_2 no tienen un componente común (y por lo tanto se cruzan en un número finito de puntos), tenemos:*

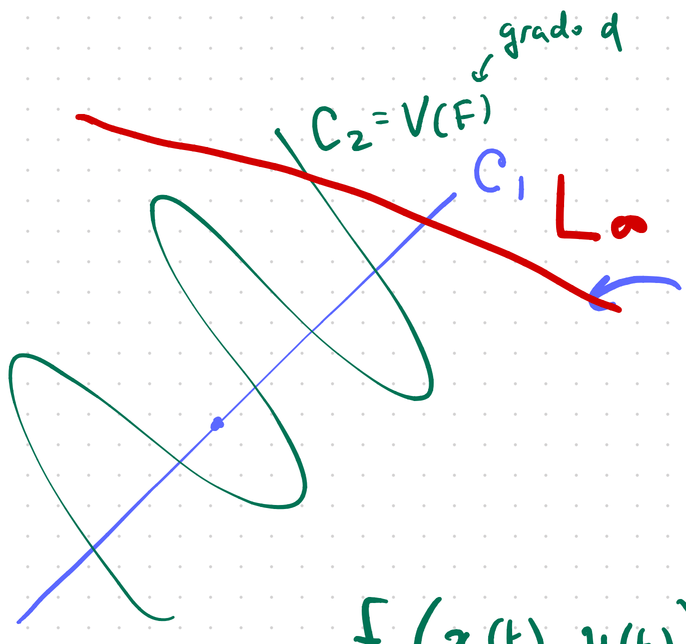
$$|C_1 \cap C_2|_m := \sum_{p \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}} m_p(C_1, C_2) = d_1 \cdot d_2.$$



Pb 1: Ingredientes:

- Teor. fund del algébra
- Invar. deformación m_p

① Si C_1 e' una recta:



$\mathbb{A}^1$

t

$$\begin{cases} x(t) = a + tb \\ y(t) = c + td \end{cases}$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$f(x(t), y(t)) = f(a+tb, c+td) = 0$$

$\boxed{\text{grado } d}$

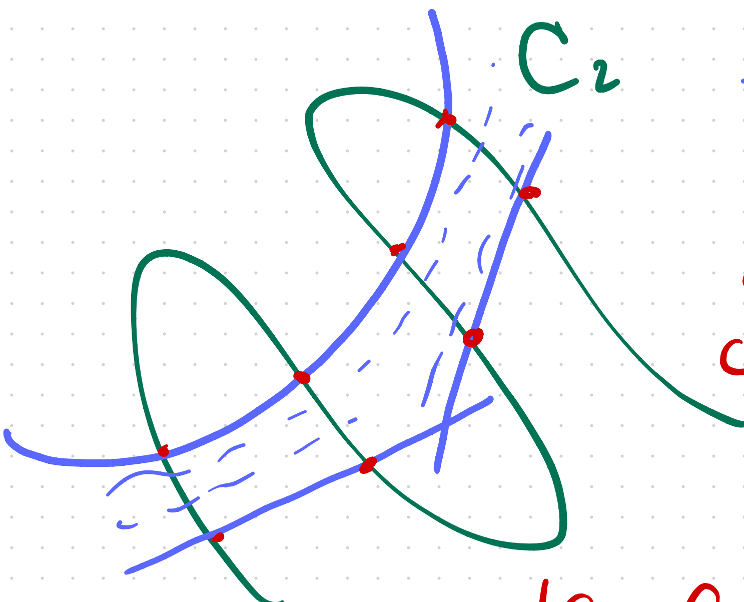
② Deforma: toma d polys lineares homogeneos

$$L_i = a_i X + b_i Y + c_i Z$$

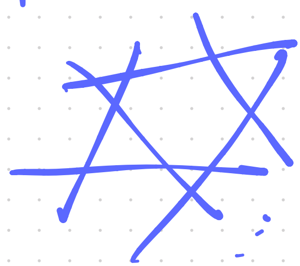
$$C_1(\tau) = (1-\tau) F_1 + \tau \prod_{1}^{d} L_i$$

$$V(C_1(0)) = V(F_1)$$

$$V(C_1(1)) = V\left(\prod_{1}^{d} L_i\right) = \bigcup_{1}^{d} V(L_i)$$



$=$



d_1 rectas cada $\cap$ C_2 en d_2 puntos

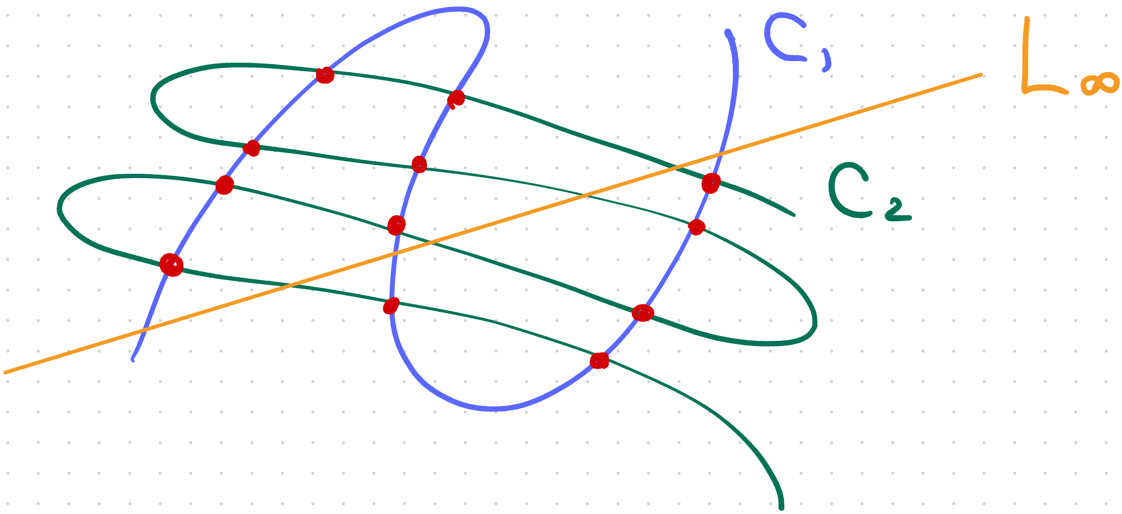
$\Downarrow$

$$|C_1 \cap C_2|_m = d_1 \cdot d_2$$

Pb 2: Ingredientes:

- álgebra conmutativo

① Escoje buenas coordenadas



② Desde locál a global

$$\phi : \frac{\mathbb{C}[x,y]}{\langle f_1, f_2 \rangle} \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathbb{C}^2} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2, p}}{\langle f_1, f_2 \rangle}$$

$$g \longmapsto \bigoplus_{p \in \mathbb{C}^2} [g]$$

es un isomorfismo!

③ Resolución

Lema 4.2. *Denotemos $C[x_y]_{\leq d}$ al espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a d. Para cualquier d suficientemente grande (en particular si $d \geq d_1 + d_2$), la siguiente es una sucesión exacta de espacios vectoriales:*

$$0 \to \underset{\substack{\uparrow \\ q}}{C[x,y]_{\leq d-d_1-d_2}} \xrightarrow{\alpha} C[x,y]_{\leq d-d_1} \oplus C[x,y]_{\leq d-d_2} \xrightarrow{\beta} C[x,y]_{\leq d} \to \frac{\mathbb{C}[x,y]}{\langle f_1, f_2\rangle} \to 0,$$

donde los mapas α y β se definen de la siguiente manera:

$$\alpha(h) = (h \cdot f_2, -h \cdot f_1),$$

$$\beta(k_1, k_2) = f_1 k_1 + f_2 k_2.$$

$d-d_2-d_1 \qquad d-d_1 \qquad d-d_2$

$$q \overset{\alpha}{\longmapsto} (q \cdot f_2, -q \cdot f_1) \overset{\beta}{\longmapsto} q f_2 f_1 + (-q f_1 f_2)$$

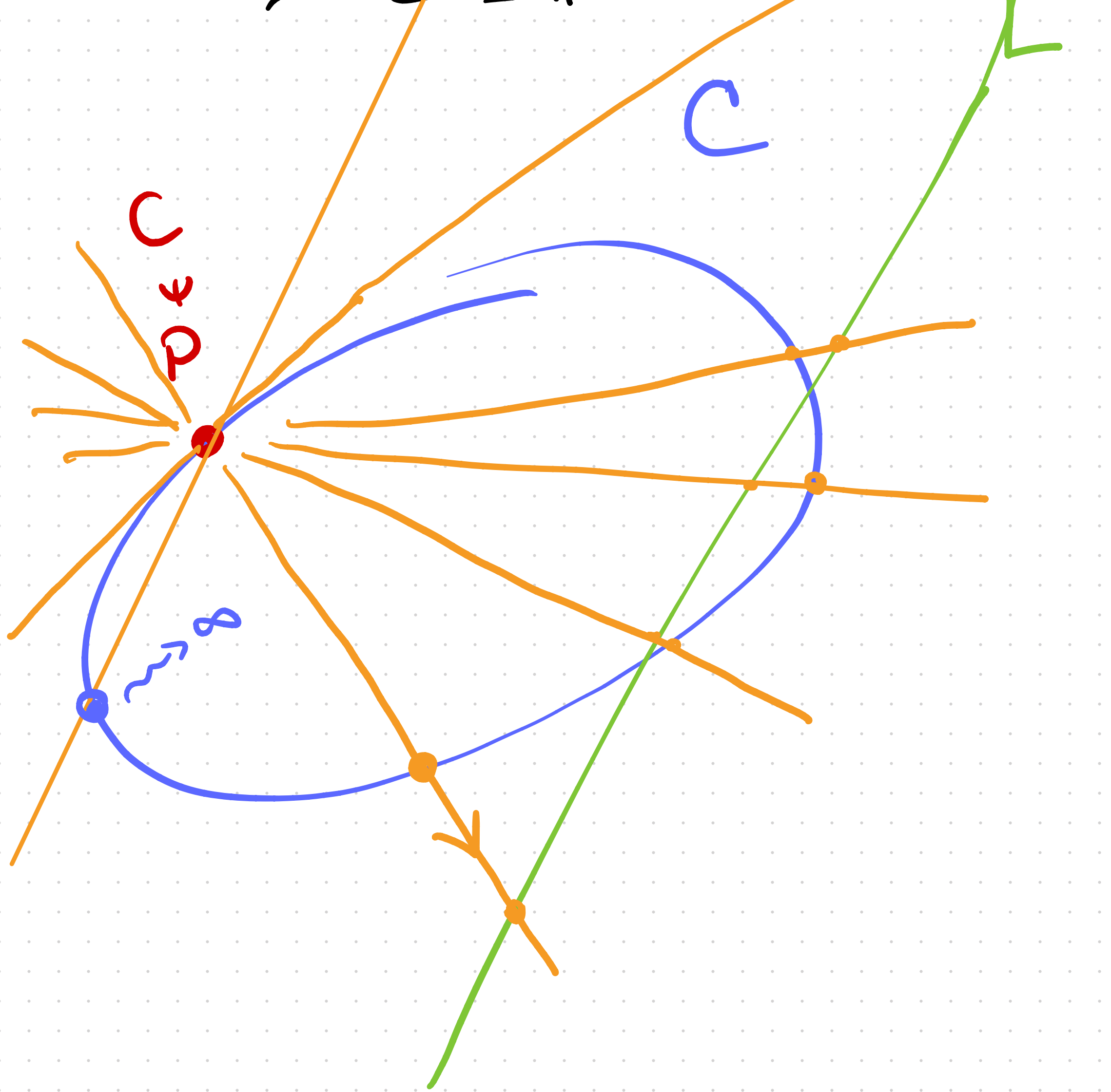
$$= 0$$

$$\mathbb{C}[x,y]_{\leq d} = \binom{d+2}{2}$$

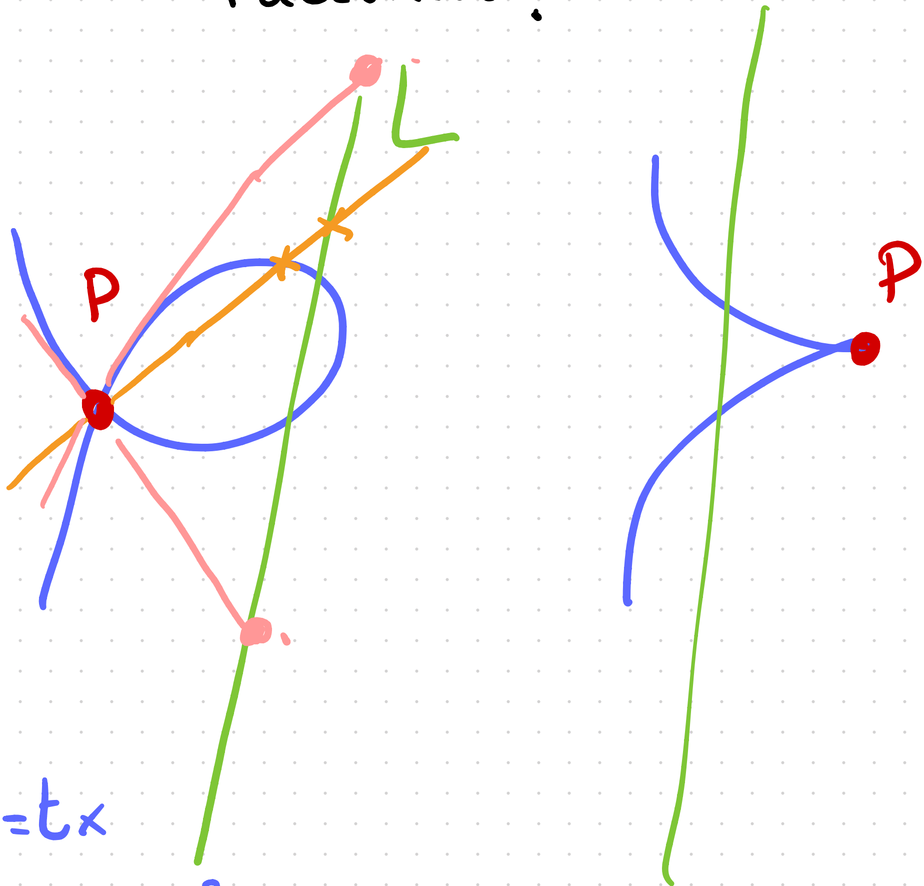
Racionalidad

Thm 1: C cónica suave

$\Rightarrow C \cong \mathbb{P}^1$



Thm 2: Cubica singular és racionál!

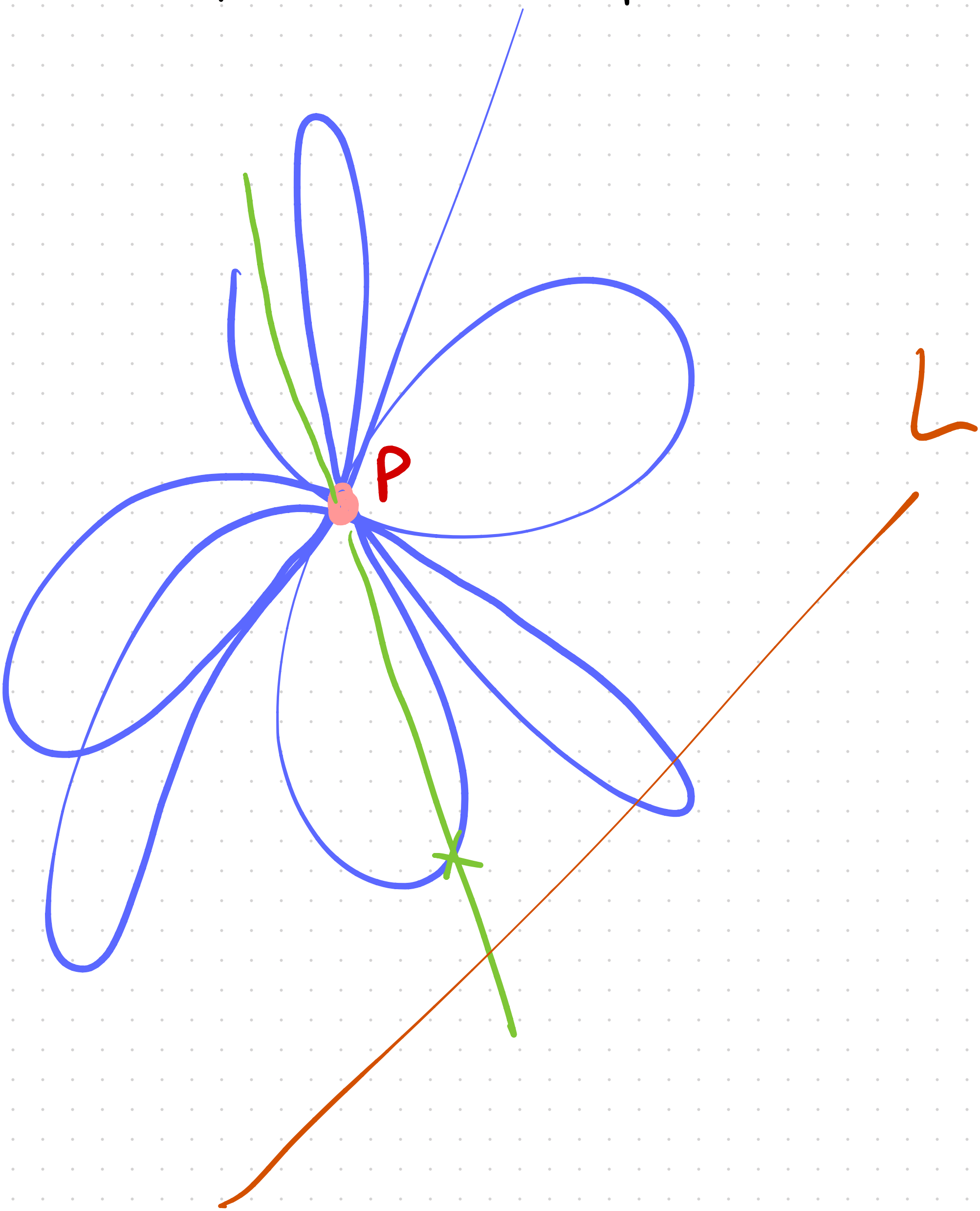


$$\begin{cases} y = tx \\ y^2 - x^2 + x^3 = 0 \end{cases}$$

$$\phi : \begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = t^3 - t \end{cases}$$

$$t = \pm 1 \Rightarrow \phi(t) = (0,0)$$

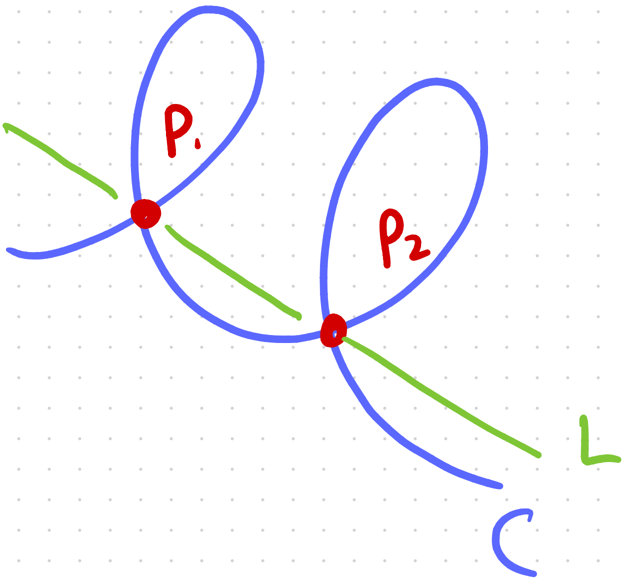
Thm 3 C de grado d con un punto $(d-1)$-plo es racional.

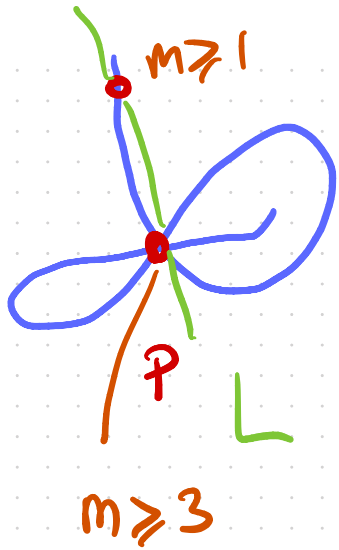


Cotas de puntos singulares

IRREDUCIBLE

Teorema 4.5. *Una cúbica plana singular puede tener como máximo un punto doble. Para ser precisos, estamos descartando la posibilidad de más de un punto singular y la posibilidad de un solo punto de multiplicidad mayor que 2.*





$3+1>3$

Teorema 4.6. *Una curva de grado d no puede tener más de $\binom{d-1}{2}$ puntos singulares.*

se hay $\binom{d-1}{2} + 1$ punto singular $\Rightarrow$ $\exists$ curva de grado $(d-2)$ que pasa por los ptos singulares + $d-3$ puntos simples.

$$\left(\binom{d-1}{2}-1\right)2 + \leq |C_1 \cap C_r|_m = d(d-2)$$

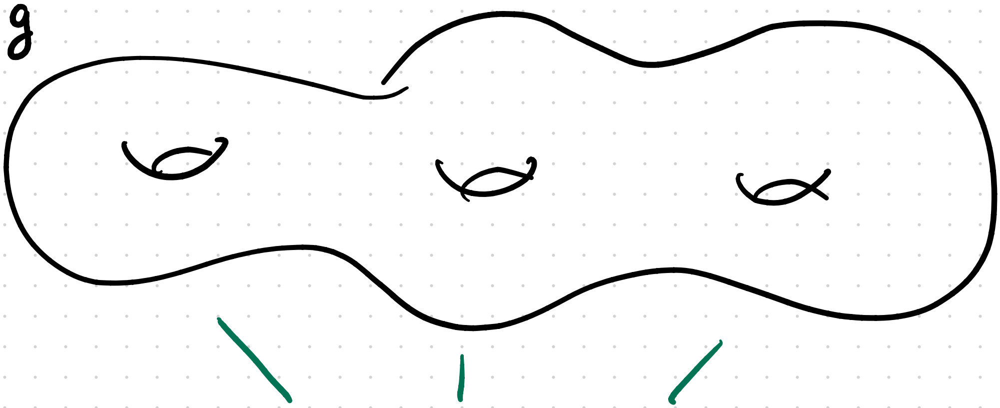
$(d-3)$

Genero de una curva suave

Hecho 1: curvas algebraicas projectivas, complejas, suaves son superficies, orientables, compactas

$$\Downarrow$$

T_g



g - huecos

genero

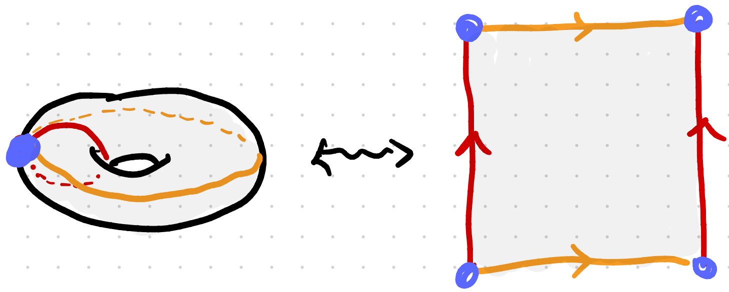
Hecho 2:

$$\chi(T_g) = 2 - 2g$$

$$\shortparallel$$

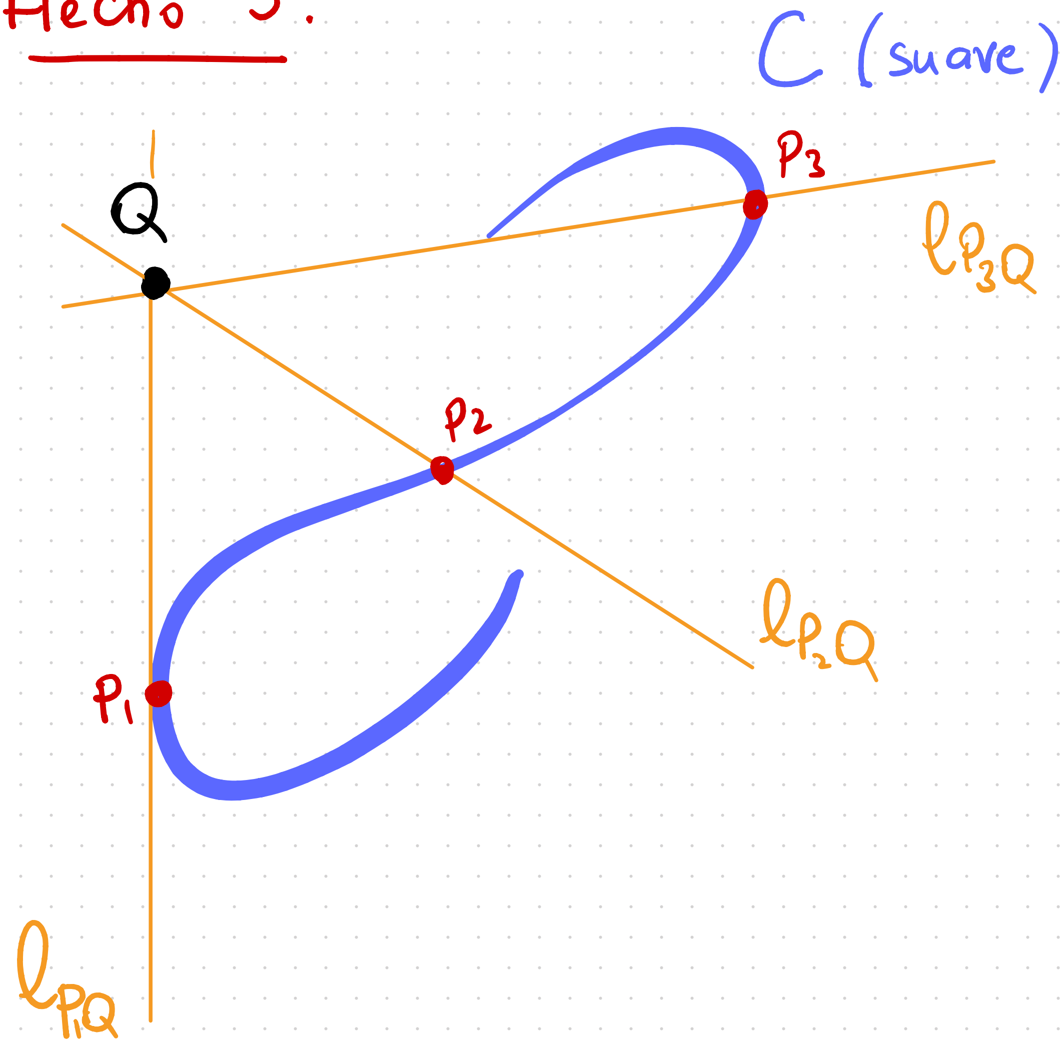
$$|\#V| - |\#E| + |\#F|$$

por cualquier buen grafo sobre T_g:



$$\boxed{\chi(T_1) = 1 - (1 + 1) + 1 = 0}$$

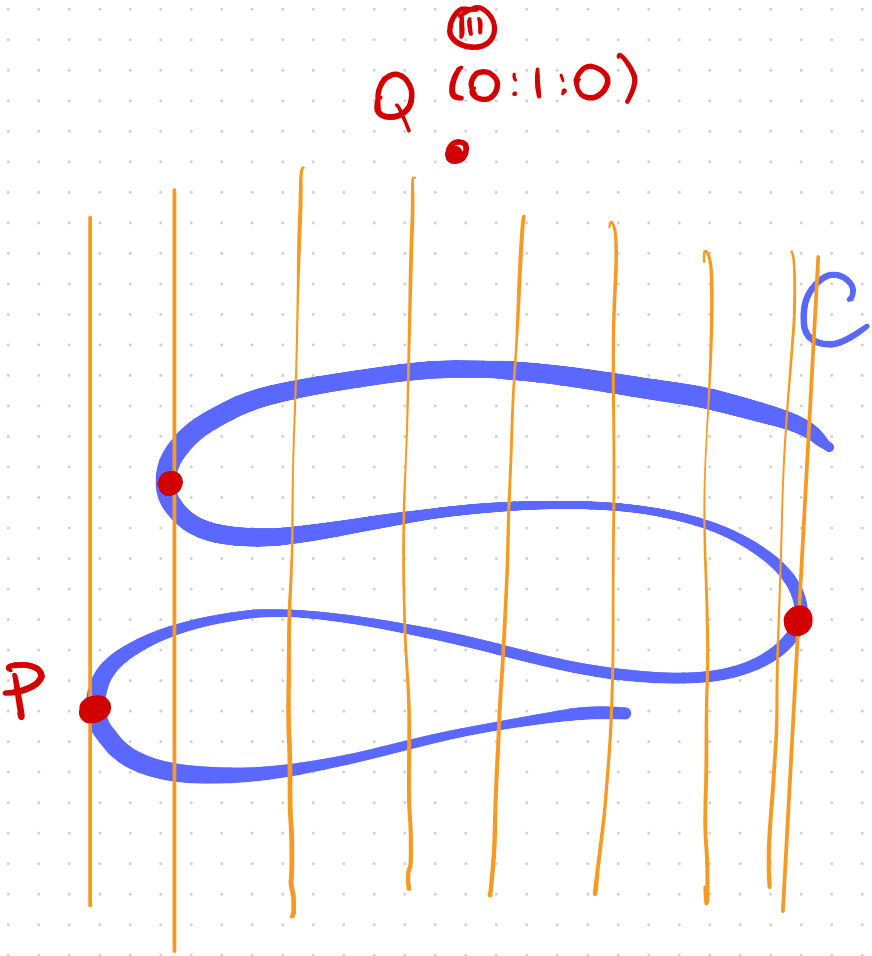
Hecho 3:



$$\boxed{\sum_{P\in C}\left(m_P(\ell_{PQ}, C)\right)-1 = 2g+2d-2}$$

Teorema 4.7. *Una curva proyectiva suave, plana y compleja C de grado d tiene género $\binom{d-1}{2}$.*

Escoje coordenadas con $(0:1:0) \notin C$



$$m_P(\ell_{PQ}, C) - 1 = m_P\left(V(C), V\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)\right)$$

$$\boxed{\sum_{P\in C}\left(m_P(\ell_{PQ},C)-1\right) = \left|C\cap V\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)\right|_m}$$

hecho 3

Bezóut

$$\Downarrow$$

$$\boxed{2g+2d-2 = d(d-1)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}}$$

$\square$

¡Gracias!

¡y Pura Vida!

renzo@colostate.edu